JOURNAL OF ALGEBRA 76, 234–260 (1982)

S-Groupes des Classes d'un Ordre Arithmétique

JACQUES QUEYRUT

*Département de Mathématiques, Université de Bordeaux,**
33405 Talence, France

Communicated by A. Fröhlich

Received June 10, 1980

Soit R un anneau de Dedekind de corps des fractions K; soit $\mathfrak{D}$ un ordre de R dans une K-algèbre semi-simple A de dimension finie sur K. On se donne un ensemble fini S de places de R.

La $\mathscr{K}$-théorie algébrique permet de classifier les $\mathfrak{D}$-modules de type fini au moyen des groupes de Grothendieck. En particulier, elle s'intéresse au groupe $\mathscr{K}_0(\mathfrak{D})$ des classes des $\mathfrak{D}$-modules projectifs (Heller et Reiner [8]) et au groupe $\mathscr{G}_0(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{G}_\oplus(\mathfrak{D})$) des classes des $\mathfrak{D}$-modules de type fini relativement aux suites exactes (resp. relativement aux sommes directes) (voir Bass [1] et Reiner [14]). De nombreuses descriptions de ces groupes ont été données. En particulier, Fröhlich a construit un homomorphisme, Det, à partir de la norme réduite, permettant de donner une nouvelle description du groupe $\mathscr{K}_0(\mathfrak{D})$ [6]. Cette description a donné une nouvelle formulation des propriétés fonctorielles de $\mathscr{K}_0(\mathfrak{D})$ et a permis de préciser la structure de module de Frobenius de $\mathscr{K}_0(\mathfrak{D})$ lorsque $\mathfrak{D}$ est une algèbre de groupe $R[\Gamma]$ sur R (Cassou-Noguès [3]). En outre, Fröhlich puis Taylor et Cassou-Noguès ont montré que cette description est particulièrement bien adaptée à l'étude de la structure galoisienne des anneaux d'entiers d'extensions modérément ramifiées.

Le but de cet article est de généraliser ces résultats. Tout d'abord on définit deux nouveaux types de groupes de Grothendieck; le premier, noté $\mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D})$, permet de classifier les modules localement projectifs en dehors de S; le second, noté $\mathscr{G}^S_\oplus(\mathfrak{D})$, est associé aux suites exactes localement scindées en dehors de S; il donne une classification plus fine que celle de $\mathscr{G}_0(\mathfrak{D})$. Ces définitions permettent d'unifier les groupes de Grothendieck considérés jusqu'ici. En combinant les méthodes introduites par Fröhlich [6] et Heller [7], on donne une description de ces groupes généralisant celle de Fröhlich et donnant en particulier une nouvelle description de $\mathscr{G}_0(\mathfrak{D})$ et $\mathscr{G}_\oplus(\mathfrak{D})$.

La motivation principale de cet article est la situation suivante: l'ordre considéré est l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[\Gamma]$ d'un groupe fini Γ, groupe de Galois

* Laboratoire associé au C.N.R.S. 226.

0021-8693/82/050234–27\$02.00/0

d'une extension N/K de corps de nombres; alors l'anneau $\mathbb{Z}_N$ des entiers de N est un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module localement projectif aux places modérément ramifiées dans N/K. L'étude de la classe de $\mathbb{Z}_N$ dans les groupes $\mathscr{K}_0^S(\mathbb{Z}[\Gamma])$ et $\mathscr{G}_\oplus^S(\mathbb{Z}[\Gamma])$ fera l'objet de deux articles [3, 4].

Dans le paragraphe 1, on donne les définitions de $\mathscr{G}_\oplus^S(\mathfrak{D})$ et $\mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D})$ et on montre l'existence de suites exactes analogues à celle de Heller et Reiner [8]. Le paragraphe 2 généralise les questions de rationnalité des représentations de groupes aux représentations d'algèbres séparables de dimension finie (voir [16]). Ce paragraphe est utilisé pour donner une nouvelle description du groupe de Grothendieck $\mathscr{G}_0^t(\mathfrak{D})$ des $\mathfrak{D}$-modules de torsion (paragraphe 3). On y rappelle et généralise la définition de l'application Det introduite par Fröhlich. Ceci permet, dans le paragraphe 4, de décrire les groupes $\mathscr{G}_\oplus^S(\mathfrak{D})$ et $\mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D})$ pour un ordre arithmétique $\mathfrak{D}$. Le paragraphe 5 donne les propriétés fonctorielles de ces groupes. On termine en donnant des exemples de calculs de groupes $\mathscr{G}_\oplus^S(\mathbb{Z}[\Gamma])$ pour des algèbres de groupes (paragraphe 6).

Notation. Pour tout anneau A, on note A^* le groupe des éléments inversibles de A.

1. S-GROUPES DE GROTHENDIECK

Soit R un anneau de Dedekind de corps des fractions K, et soit S une partie de l'ensemble $\mathscr{P}(R)$ des idéaux premiers de R. L'indexation par un élément $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R)$ désignera la complétion en $\mathfrak{p}$.

Soit $\mathfrak{D}$ un ordre de R dans une K-algèbre A semi-simple et de dimension finie sur K.

A toute catégorie $\mathscr{C}$ de $\mathfrak{D}$-modules de type fini, on associe le groupe abélien libre $\mathscr{G}(\mathscr{C})$ engendré par les classes d'isomorphisme (M) des modules M de $\mathscr{C}$ et le sous-groupe $\mathscr{G}'_S(\mathscr{C})$ de $\mathscr{G}(\mathscr{C})$ engendré par les éléments de la forme $(M) - (M') - (M'')$, où M, M' et M'' sont des objets de $\mathscr{C}$ vérifiant: il existe une suite exacte $0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ telle que, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S$, la suite $0 \to M'_\mathfrak{p} \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \xrightarrow{\psi_\mathfrak{p}} M''_\mathfrak{p} \to 0$ est scindée.

DÉFINITION 1.1. On appelle S-groupe de Grothendieck de $\mathscr{C}$ le groupe quotient $\mathscr{G}(\mathscr{C})/\mathscr{G}'_S(\mathscr{C})$. On le note $\mathscr{K}_0^S(\mathscr{C})$.

On note $[M]$, la classe dans $\mathscr{G}(\mathscr{C})/\mathscr{G}'_S(\mathscr{C})$ d'un module M de $\mathscr{C}$.

On s'intéresse en particulier aux trois catégories suivantes:

$\mathscr{C}(\mathfrak{D})$ la catégorie des $\mathfrak{D}$-modules de type fini sans R-torsion;

$\mathscr{C}_{lp}^S(\mathfrak{D})$ la catégorie des $\mathfrak{D}$-modules M de type fini sans R-torsion et tels que $M_\mathfrak{p}$ est un $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$-module projectif pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S$;

$\mathscr{C}^S_{ll}(\mathfrak{D})$ la catégorie des $\mathfrak{D}$-modules M de type fini sans R-torsion et tels que $M_\mathfrak{p}$ est un $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$-module libre pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S$.

On a $\mathscr{C}^S_{ll}(\mathfrak{D}) \subset \mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D}) \subset \mathscr{C}(\mathfrak{D})$.

On note $\mathscr{G}^S_\oplus(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{K}^S_0(\mathfrak{D})$) le S-groupe de Grothendieck de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$).

Comme on le montrera plus loin (corollaire 1.7) le S-groupe de Grothendieck de $\mathscr{C}^S_{ll}(\mathfrak{D})$ se décrit à l'aide de $\mathscr{K}^S_0(\mathfrak{D})$.

Pour faire le lien avec les groupes de Grothendieck déjà connus, on choisit quelques ensembles S particuliers.

Tout d'abord si S est vide, on note plus simplement $\mathscr{K}_0(\mathscr{C})$ le groupe $\mathscr{K}^S_0(\mathscr{C})$. Ainsi $\mathscr{K}_0(\mathfrak{D})$ est l'habituel groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathfrak{D}$-modules projectifs et $\mathscr{G}_\oplus(\mathfrak{D})$ est le quotient de $\mathscr{G}(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $(M' \oplus M'') - (M') - (M'')$.

Ensuite si S est gros, plus précisément si S contient l'ensemble $\mathscr{F}(\mathfrak{D})$ des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de R tels que $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ n'est pas un ordre maximal de $R_\mathfrak{p}$ dans $A_\mathfrak{p}$, alors $\mathscr{G}^S_\oplus(\mathfrak{D})$ est égal à $\mathscr{K}^S_0(\mathfrak{D})$ et coïncide avec le groupe de Grothendieck noté habituellement $\mathscr{G}_0(\mathfrak{D})$. Ce groupe est le quotient de $\mathscr{G}(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))$ par le sous-groupe engendré par les éléments $(M) - (M') - (M'')$ où M, M', et M'' sont des $\mathfrak{D}$-modules de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$ qui sont simplement liés par une suite exacte.

On a de plus $\mathscr{G}^S_\oplus(\mathfrak{D}) = \mathscr{G}^{S\cap\mathscr{F}(\mathfrak{D})}_\oplus$ et $\mathscr{K}^S_0(\mathfrak{D}) = \mathscr{K}^{S\cap\mathscr{F}(\mathfrak{D})}_0(\mathfrak{D})$.

Les résultats précédents sont encore vrais si l'on remplace $\mathscr{F}(\mathfrak{D})$ par l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de R tels que $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ n'est pas un ordre héréditaire.

On supposera pour la suite que $S \subset \mathscr{F}(\mathfrak{D})$.

Enfin soit S' une partie de $\mathscr{P}(R)$ contenant S. Le foncteur identité définit un homomorphisme surjectif de $\mathscr{G}^S_\oplus(\mathfrak{D})$ sur $\mathscr{G}^{S'}_\oplus(\mathfrak{D})$, car $\mathscr{G}'_S(\mathscr{C}(\mathfrak{D})) \subset \mathscr{G}'_{S'}(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))$. L'inclusion $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D}) \subset \mathscr{C}^{S'}_{lp}(\mathfrak{D})$ permet de plonger $\mathscr{G}(\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D}))$ dans $\mathscr{G}(\mathscr{C}^{S'}_{lp}(\mathfrak{D}))$. Comme $\mathscr{G}'_S(\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D}))$ est alors inclus dans $\mathscr{G}'_{S'}(\mathscr{C}^{S'}_{lp}(\mathfrak{D}))$, on en déduit un homomorphisme de $\mathscr{K}^S_0(\mathfrak{D})$ dans $\mathscr{K}^{S'}_0(\mathfrak{D})$.

PROPOSITION 1.2. *Soient M et N deux $\mathfrak{D}$-modules de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$). Alors $[M] = [N]$ dans $\mathscr{G}^S_\oplus(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{K}^S_0(\mathfrak{D})$) si et seulement s'il existe trois $\mathfrak{D}$-modules U, V et W de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$) et deux suites exactes*:

$$0 \to V \to M \oplus U \to W \to 0,$$

$$0 \to V \to N \oplus U \to W \to 0$$

scindées localement pour tout idéal $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S$.

Démonstration. Voir A. Heller, lemme 2.1 [2].

Ainsi $[M] = [N]$ dans $\mathscr{G}_\oplus(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{K}_0(\mathfrak{D})$) si et seulement s'il existe un $\mathfrak{D}$-module U de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C}_{lp}(\mathfrak{D})$) et un isomorphisme de $M \oplus U$ sur $N \oplus U$.

Soit $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R)$ et soit $\mathscr{C}_{\mathfrak{p}}$ une sous-catégorie de $\mathscr{C}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}})$. On pose:

$$\mathscr{K}_0^S(\mathscr{C}_{\mathfrak{p}}) = \mathscr{K}_0(\mathscr{C}_{\mathfrak{p}}) \qquad \text{si } \mathfrak{p} \notin S,$$

$$\mathscr{K}_0^S(\mathscr{C}_{\mathfrak{p}}) = \mathscr{K}_0^{\{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}}(\mathscr{C}_{\mathfrak{p}}) \qquad \text{si } \mathfrak{p} \in S.$$

Ainsi

$$\mathscr{G}_{\oplus}^S(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}) = \mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}) = \mathscr{G}_0(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}) \qquad \text{si } \mathfrak{p} \in S$$

et

$$\mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}) = \mathscr{K}_0(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}), \qquad \mathscr{G}_{\oplus}^S(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}) = \mathscr{G}_{\oplus}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}) \qquad \text{si } \mathfrak{p} \notin S.$$

DÉFINITION 1.3. On appelle S-groupe des classes de $\mathfrak{D}$ (resp. des classes projectives de $\mathfrak{D}$) le noyau de l'homomorphisme de $\mathscr{G}_{\oplus}^S(\mathfrak{D})$ dans $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R)} \mathscr{G}_{\oplus}^S(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}})$ (resp. de $\mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D})$ dans $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R)} \mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}})$) obtenu à partir des foncteurs d'extension des scalaires à $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$. On note ce groupe $\tilde{\mathscr{G}}_{\oplus}^S(\mathfrak{D})$ (resp. $\tilde{\mathscr{K}}_0^S(\mathfrak{D})$).

LEMME 1.4. *Soit T un $\mathfrak{D}$-module de type fini et soient $0 \to M \to N \to T \to 0$ et $0 \to M' \to N' \to T \to 0$ deux suites exactes où M, N, M', N' sont des $\mathfrak{D}$-modules de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$.*

(1) *Si N et N' sont des $\mathfrak{D}$-modules de $\mathscr{C}_{lp}^S(\mathfrak{D})$, $[M] - [N] = [M'] - [N']$ dans $\mathscr{G}_{\oplus}^S(\mathfrak{D})$. Si de plus M est un $\mathfrak{D}$-module de $\mathscr{C}_{lp}^S(\mathfrak{D})$, alors $M' \in \mathscr{C}_{lp}^S(\mathfrak{D})$ et cette égalité est vraie dans $\mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D})$.*

(2) *Si $T_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{F}(\mathfrak{D}) - S$, $[M] - [N] = [M'] - [N']$ dans $\mathscr{G}_{\oplus}^S(\mathfrak{D})$.*

Démonstration. Soit Q le produit fibré de N et de N' au-dessus de T. On obtient un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & M' \arrow[r, equal] \arrow[d] & M' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Si N' et N sont des $\mathfrak{D}$-modules localement projectifs pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S$, les deux suites $0 \to M \to Q \to N' \to 0$ et $0 \to M' \to Q \to N \to 0$ sont localement scindées pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S$. D'où $[Q] = [M] + [N'] = [M'] + [N]$ dans $\mathscr{G}_{\oplus}^{S}(\mathfrak{D})$. Si de plus M est un $\mathfrak{D}$-module de $\mathscr{C}_{lp}^{S}(\mathfrak{D})$, $Q \in \mathscr{C}_{lp}^{S}(\mathfrak{D})$; donc $M' \in \mathscr{C}_{lp}^{S}(\mathfrak{D})$; cette égalité est vraie dans $\mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D})$.

Sinon les deux suites précédentes sont scindées si $\mathfrak{p} \notin \mathscr{F}(\mathfrak{D})$ car $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ est un ordre maximal et si $\mathfrak{p} \in \mathscr{F}(\mathfrak{D}) - S$ car $T_{\mathfrak{p}} = 0$. Donc $[Q] = [M] + [N'] = [M'] + [N]$ dans $\mathscr{G}_{\oplus}^{S}(\mathfrak{D})$.

Définition 1.5. On appelle S-genres de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$ les classes de $\mathfrak{D}$-modules de type fini sans torsion pour la relation d'équivalence

$$MV_S N \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S, & M_{\mathfrak{p}} \text{ est isomorphe à } N_{\mathfrak{p}} \\ \forall \mathfrak{p} \in S, & [M_{\mathfrak{p}}] = [N_{\mathfrak{p}}] \text{ dans } \mathscr{G}_0(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}). \end{cases}$$

Pour $\mathfrak{p} \notin S$, $M_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe à $N_{\mathfrak{p}}$ si et seulement si $[M_{\mathfrak{p}}] = [N_{\mathfrak{p}}]$ dans $\mathscr{G}_{\oplus}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}})$ car le théorème de Krull–Schmidt est applicable aux $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$-modules.

Corollaire 1.6. *Le groupe $\tilde{\mathscr{K}}_0^S(\mathfrak{D})$ est égal à $\{[\mathfrak{D}^n] - [M], \mathfrak{D}^n V_S M\}$. Si A est une K-algèbre séparable, il existe un ordre $\mathfrak{M}^S$ de R dans A contenant $\mathfrak{D}$ et vérifiant $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}^S = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ si $\mathfrak{p} \in S$ et $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}^S$ est un ordre maximal de $R_{\mathfrak{p}}$ si $\mathfrak{p} \notin S$. Alors le groupe $\tilde{\mathscr{G}}_{\oplus}^S(\mathfrak{D})$ est égal à $\{[\mathfrak{D}^n] - [M], \mathfrak{D}^n V_S M]$ et aussi à $\{[(\mathfrak{M}^S)^n] - [M], (\mathfrak{M}^S)^n\, V_S M\}$ (M et $\mathfrak{M}^S$ étant considérés comme des $\mathfrak{D}$-modules).*

Démonstration. Si A est séparable, il existe un ordre maximal $\mathfrak{M}$ contenant $\mathfrak{D}$. Il existe donc bien un ordre $\mathfrak{M}^S$ vérifiant les conditions du corollaire. Soit $x \in [M'] - [M''] \in \tilde{\mathscr{K}}_0^S(\mathfrak{D})$ (resp. $\tilde{\mathscr{G}}_{\oplus}^S(\mathfrak{D})$); $K \otimes_R M'$ est isomorphe à $K \otimes_R M''$; il existe un homomorphisme φ injectif de M' dans M''. Si A est séparable, $\mathscr{F}(\mathfrak{D})$ est fini; on peut choisir φ tel que $\varphi(M'_{\mathfrak{p}}) = M''_{\mathfrak{p}}$, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{F}(\mathfrak{D}) - S$. Soit $T = M''/\varphi(M')$. Il existe deux suites exactes: $0 \to M \to \mathfrak{D}^n \to T \to 0$ et $0 \to M' \to M'' \to T \to 0$ vérifiant les conditions du lemme précédent donc $[M'] - [M''] = [\mathfrak{D}^n] - [M]$. On a $[\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^n] = [M_{\mathfrak{p}}]$ dans $\mathscr{G}_{\oplus}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}})$, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{F}(\mathfrak{D}) - S$. On en déduit que $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^n$ est isomorphe à $M_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \notin S$. Donc M est dans le S-genre de $\mathfrak{D}^n$. Si T est localement nul pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{F}(\mathfrak{D}) - S$, T est $\mathfrak{M}^S$-module, il existe donc une suite exacte $0 \to N' \to (\mathfrak{M}^S)^n \to T \to 0$ et le lemme précédent permet de conclure.

Corollaire 1.7. *Soit $\mathscr{K}_0(\mathscr{C}_{ll}^S(\mathfrak{D}))$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{C}_{ll}^S(\mathfrak{D})$ et soit $\mathscr{C}\ell^S(\mathfrak{D})$ le noyau de l'homomorphisme de $\mathscr{K}_0(\mathscr{C}_{ll}^S(\mathfrak{D}))$ dans $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R)} \mathscr{K}_0^S(\mathscr{C}_{ll}^S(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}))$ obtenu à partir des foncteurs d'extension des scalaires à $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$. L'application qui à $[M] - [N] \in \mathscr{C}\ell^S(\mathfrak{D})$ associe $[M] - [N] \in \tilde{\mathscr{K}}_0^S(\mathfrak{D})$ est un isomorphisme.*

Si A est une K-algèbre séparable, le foncteur restriction des scalaires de

$\mathfrak{M}^S$ à $\mathfrak{D}$ définit un isomorphisme de $\mathscr{C}\ell^S(\mathfrak{M}^S)$ sur $\tilde{\mathscr{G}}^S_{\oplus}(\mathfrak{D})$, le foncteur extension des scalaires de $\mathfrak{D}$ à $\mathfrak{M}^S$ définissant l'isomorphisme réciproque.

On note $\mathrm{Res}^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{M}^S}$ et $\mathrm{Ext}^{\mathfrak{M}^S}_{\mathfrak{D}}$ ces deux isomorphismes.

Si S est vide, $\mathscr{C}\ell^S(\mathfrak{D})$ est l'habituel groupe des classes des $\mathfrak{D}$-modules localement libres, noté $\mathscr{C}\ell(\mathfrak{D})$.

La deuxième partie de ce corollaire a été démontrée par H. Jacobinski, [9], dans le cas où S est vide et K est un corps de nombres.

Démonstration. La surjectivité de l'homomorphisme $\mathscr{C}\ell^S(\mathfrak{D}) \to \tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C}\ell^S(\mathfrak{M}^S) \to \tilde{\mathscr{G}}^S_{\oplus}(\mathfrak{D})$) découle du corollaire 1.6. Soit $x \in \mathscr{C}^S_{ll}(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C}\ell^S(\mathfrak{M}^S)$) tel que $x = [M] - [N]$ est d'image nulle dans $\tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathfrak{D})$ (resp. $\tilde{\mathscr{G}}^S_{\oplus}(\mathfrak{D})$). Il existe donc trois modules U, V et W de $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$) et deux suites exactes:

$$0 \to V \to M \oplus U \to W \to 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \to V \to N \oplus U \to W \to 0$$

localement scindées pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S$. Il existe en outre deux suites exactes

$$0 \to V' \to \mathfrak{D}^n \to V \to 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \to W' \to \mathfrak{D}^n \to W \to 0.$$

Si V et W sont des $\mathfrak{D}$-modules de $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$, $W \oplus W'$ et $V \oplus V'$ sont des $\mathfrak{D}$-modules de $\mathscr{C}^S_{ll}(\mathfrak{D})$. On pose $U' = V' \oplus W' \oplus U$, on a deux suites exactes:

$$0 \to V \oplus V' \to M \oplus U' \to W \oplus W' \to 0 \qquad \text{et}$$

$$0 \to V \oplus V' \to N \oplus U' \to W \oplus W' \to 0$$

scindées localement pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S$. Si M et N sont des $\mathfrak{D}$-modules de $\mathscr{C}^S_{ll}(\mathfrak{D})$, U' est aussi un $\mathfrak{D}$-module de $\mathscr{C}^S_{ll}(\mathfrak{D})$. Ceci démontre la première partie. Comme $\mathfrak{M}^S_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in S$, le foncteur extension des scalaires de $\mathfrak{D}$ à $\mathfrak{M}^S$ conserve les suites exactes localement scindées pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S$. On a donc deux suites exactes:

$$0 \to \mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} V \to (\mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} M) \oplus (\mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} U) \to \mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} W \to 0,$$

$$0 \to \mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} V \to (\mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} N) \oplus (\mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} U) \to \mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} W \to 0.$$

D'après le lemme 1.4, l'application de Cartan de $\mathscr{K}^S_0(\mathfrak{M}^S)$ dans $\mathscr{K}^S_0(\mathrm{Mod}(\mathfrak{M}^S))$ est un isomorphisme; on identifira donc ces deux groupes ($\mathrm{Mod}(\mathfrak{M}^S)$ désigne la catégorie des $\mathfrak{M}^S$ modules de type fini). Donc $[\mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} M] - [\mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} N] = 0$ dans $\mathscr{K}^S_0 \mathfrak{M}^S)$. Il existe un $\mathfrak{D}$-homomorphisme injectif φ de M dans N tel que $\varphi(M)_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{F}(\mathfrak{D}) - S$. On a donc une suite exacte $0 \to M \to^{\varphi} N \to T \to 0$ avec $T = N/\varphi(M)$ tel que $T_{\mathfrak{p}} = 0$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathscr{F}(\mathfrak{D}) - S$. On a $\mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} T$ isomorphe à T. Donc la suite suivante est exacte:

$$0 \to \mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} M \to \mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} N \to T \to 0.$$

Le lemme 1.4 montre que $[\mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} M] - [\mathfrak{M}^S \otimes_{\mathfrak{D}} N] = [M] - [N]$ dans $\mathcal{K}_0^S(\mathfrak{M}^S)$. Cette dernière partie montre, en plus de l'injectivité de l'application $\mathrm{Res}_{\mathfrak{M}^S}^{\mathfrak{D}}$, que l'application $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^S}$ est l'isomorphisme réciproque.

On se propose de montrer l'existence de suites exactes analogues à celle de Heller et Reiner établie pour $\mathcal{G}_0(\mathfrak{D})$ et à celle de Bass établie pour $\mathcal{K}_0(\mathfrak{D})$ (voir [1, p. 499; 8]). On associe à $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$ la catégorie, notée $\mathscr{C}(\mathfrak{D})'$, suivante:

les objets de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})'$ sont les triplets (M, α, N) où M et N sont des objets de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$ et α est un A-isomorphisme de $K \otimes_R M$ sur $K \otimes_R N$,

un morphisme de (M, α, N) dans (M', α', N') est un couple (f, g) de $\mathfrak{D}$-homomorphismes de M dans M' et de N dans N' respectivement et tels que $\alpha' \circ f_K = g_K \circ \alpha$ où f_K et g_K proviennent de f et g par extensions des scalaires à K. Une suite exacte d'objets et de morphismes de cette catégorie est donc donnée par un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \otimes_R M' \arrow[r, "f'_K"] \arrow[d, "\alpha'"'] & K \otimes_R M \arrow[r, "f''_K"] \arrow[d, "\alpha"'] & K \otimes_R M'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \otimes_R N' \arrow[r, "g'_K"] & K \otimes_R N \arrow[r, "g''_K"] & K \otimes_R N'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Cette suite est dite scindée s'il existe deux sections s et t de f'' et g'' respectivement telles que $\alpha \circ s_K = t_K \circ \alpha''$. Par complétion on définit de même une suite localement scindée en $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R)$.

Soit $\mathscr{C}'$ une sous-catégorie de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})'$, on note $\mathcal{K}_{\#}^S(\mathscr{C}')$ le quotient du groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme, encore notées (M, α, N), des objets (M, α, N) de $\mathscr{C}'$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $(M, \alpha, N) - (M', \alpha', N') - (M'', \alpha'', N'')$ où ces trois objets sont liés par une suite exacte localement scindée en dehors de S et les éléments de la forme $(M, \alpha\beta, P) - (M, \alpha, N) - (N, \beta, P)$. On note $[M, \alpha, N]$ la classe de (M, α, N) dans ce groupe.

DÉFINITION 1.8. Soit $\mathscr{C}$ une sous-catégorie de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$; on appelle S-groupe de Grothendieck relatif de $\mathscr{C}$, le groupe $\mathcal{K}_{\#}^S(\mathscr{C}')$ où $\mathscr{C}'$ est la sous-catégorie de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})'$ dont les objets sont les triplets (M, α, N) avec M, N appartenant à $\mathscr{C}$, et les morphismes sont définis comme ci-dessus.

On note $\mathcal{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathscr{C})$ ce groupe et en particulier pour $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{lp}^S(\mathfrak{D})$), on le note $\mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}^S(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathcal{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathfrak{D})$).

Le groupe $\mathcal{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathfrak{D})$ s'identifie au groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathfrak{D}$-modules de type fini et de R torsion qui sont quotients de deux modules localement projectifs pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S$.

Si S contient $\mathscr{F}(\mathfrak{D})$, $\mathcal{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathfrak{D})$ est égal à $\mathcal{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}^S(\mathfrak{D})$ et ces deux groupes s'identifient au groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathfrak{D}$-modules de type fini et de R-torsion, noté habituellement $\mathcal{G}_0^t(\mathfrak{D})$. L'application qui à (M, α, N) associe $[N] - [M]$ se factorise en un homomorphisme, noté v, de $\mathcal{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{K}_0^S(\mathcal{C})$.

DÉFINITION 1.9. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}(\mathfrak{D})$; on appelle S-groupe de Whitehead de $\mathcal{C}$, le groupe $\mathcal{K}_{\#}^S(\mathcal{C}'')$ où $\mathcal{C}''$ est la sous-catégorie de $\mathcal{C}(\mathfrak{D})'$ dont les objets sont les triplets (M, α_K, M) où M appartient à $\mathcal{C}$ et α_K provient par extension des scalaires à A d'un $\mathfrak{D}$-automorphisme α de M (on notera plus simplement (M, α) les objets de $\mathcal{C}''$).

On note $\mathcal{K}_1^S(\mathcal{C})$ ce groupe et en particulier pour $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{lp}^S(\mathfrak{D})$ on le note $\mathcal{K}_1^S(\mathfrak{D})$. Pour S vide ce groupe est l'habituel groupe de Whitehead $\mathcal{K}_1(\mathfrak{D})$ de la catégorie des $\mathfrak{D}$-modules projectifs. Si S contient $\mathcal{F}(\mathfrak{D})$, $\mathcal{K}_1^S(\mathcal{C}_{lp}^S(\mathfrak{D}))$ est égal à $\mathcal{K}_1^S(\mathcal{C}(\mathfrak{D}))$ et ces deux groupes sont notés $\mathcal{G}_1(\mathfrak{D})$.

Comme précédemment, on définit pour $S \subset \mathcal{P}(R)$ et $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(R)$ les groupes $\mathcal{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathcal{C}_\mathfrak{p})$ et $\mathcal{K}_1^S(\mathcal{C}_\mathfrak{p})$.

Pour $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathfrak{D})$ ou $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{lp}^S(\mathfrak{D})$ et pour tout A-module V, il existe M dans $\mathcal{C}$ et W un A-module tels que $K \otimes_R M = V \oplus W$. L'application qui à $[V, \alpha] \in \mathcal{K}_1(A)$ associe $[M, \alpha \oplus 1_W, M]$ de $\mathcal{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathcal{C})$ ne dépend pas du choix de W et de M. Elle se factorise en un homomorphisme, noté δ, de $\mathcal{K}_1(A)$ dans $\mathcal{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathcal{C})$.

THÉORÈME 1.10. *Pour $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{lp}}^S(\mathfrak{D})$ ou $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathfrak{D})$, la suite suivante est exacte:*

$$\mathcal{K}_1(A) \xrightarrow{\delta} \mathcal{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathcal{C}) \xrightarrow{v} \mathcal{K}_0^S(\mathcal{C}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{K}_0(A)$$

où ε désigne l'homomorphisme obtenu à partir du foncteur d'extension des scalaires de R à K.

Le noyau de δ contient l'image de $\mathcal{K}_1^S(\mathcal{C})$ par l'homomorphisme obtenu à partir du foncteur d'extension des scalaires de R à K.

Si S est vide, l'image de $\mathcal{K}_1^S(\mathcal{C})$ est égale au noyau de δ.

Démonstration. Voir A. Heller, propositions 4.1, 5.1 et 5.2 [7].

Notation. On note $\mathcal{H}^S(\mathcal{C})$ le noyau de δ.

COROLLAIRE 1.11. *Supposons que A est une K-algèbre séparable. La suite suivante est exacte*

$$\mathcal{K}_1(A) \xrightarrow{\delta} \mathcal{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathfrak{M}^S) \xrightarrow{v'} \mathcal{G}_\oplus^S(\mathfrak{D}) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(R)} \mathcal{G}_\oplus^S(\mathfrak{D}_\mathfrak{p}),$$

où v' est le composé de l'homomorphisme v de $\mathcal{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathfrak{M}^S)$ dans $\mathcal{K}_0^S(\mathfrak{M}^S)$ et de l'homomorphisme $\mathrm{Res}_{\mathfrak{M}^S}^{\mathfrak{D}}$ *de $\mathcal{K}_0^S(\mathfrak{M}^S)$ dans $\mathcal{G}_\oplus^S(\mathfrak{D})$ (corollaire* 1.7).

Démonstration. Il est clair que le corollaire découle du théoréme 1.10 et du corollaire 1.7.

PROPOSITION 1.12. *Pour $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathfrak{D})$ ou $\mathscr{C} = \mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$, l'application $\lambda_{0,\mathrm{rel}}$ de $\mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C})$ dans $\oplus_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)}\mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C}_\mathfrak{p})$ obtenue à partir des foncteurs d'extension des scalaires de R à $R_\mathfrak{p}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Les S-groupes de Grothendieck relatifs sont engendrés par les éléments de la forme $[M, \alpha, N]$. Soit $X \subset \alpha(M) \cap N$, $X \in \mathscr{C}$; on a $[M, \alpha, N] = [M, \alpha, \alpha(M)] - [X, 1, \alpha(M)] + [X, 1, N]$ et $[M, \alpha, \alpha(M)] = [M, 1, M] = 0$. Les S-groupes de Grothendieck relatifs sont donc engendrés par les éléments de la forme $[M, 1, N]$ où M et N sont deux $\mathfrak{D}$-réseaux d'un même A-module tels que $M \subset N$ et tels que $N \in \mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$

Nous allons construire un homomorphisme inverse de $\lambda_{0,\mathrm{rel}}$. Soit $[M, 1, N] \in \mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C}_\mathfrak{p})$ et $T = N/M$; T est un $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$-module de type fini et de $R_\mathfrak{p}$-torsion; T peut être considéré comme le complété d'un $\mathfrak{D}$-module de torsion T' dont l'annulateur dans R est une puissance de $\mathfrak{p}$. En écrivant que T' est le quotient d'un $\mathfrak{D}$-module libre:

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\beta} \mathfrak{D}^n \longrightarrow T' \longrightarrow 0,$$

on trouve que pour $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$, $U_{\mathfrak{p}'}$ est isomorphe à $\mathfrak{D}^n_{\mathfrak{p}'}$ et $[U_\mathfrak{p}, \beta, \mathfrak{D}^n_\mathfrak{p}] = [M, 1, N]$ dans $\mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C}_\mathfrak{p})$ en utilisant le lemme 1.4. On en déduit que l'aplication $\varphi_\mathfrak{p}$ définie par $\varphi_\mathfrak{p}([M, 1, N]) = [U, \beta, \mathfrak{D}^n]$ ne dépend pas du choix de U et $\mathfrak{D}^n$ et que $\lambda_{0,\mathrm{rel}} \circ \varphi_\mathfrak{p} = Id$. Soit φ l'application de $\oplus_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)}\mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C}_\mathfrak{p})$ dans $\mathscr{K}_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C})$ définie par $\varphi((x_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)}) = \sum_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)} \varphi_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})$. On a $\lambda_{0,\mathrm{rel}} \circ \varphi = \mathrm{Id}$. Réciproquement, soit $[M, 1, N] \in \mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C})$ tel que M et N soient deux $\mathfrak{D}$-réseaux d'un même A-module V tels que $N \subset M$ et $N \in \mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$. En décomposant N/M en somme directe de ces composantes $\mathfrak{p}$-primaires et en utilisant le lemme 1.4, on montre que $\varphi \circ \lambda_{0,\mathrm{rel}} = \mathrm{Id}$.

Pour $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathfrak{D})$ ou $\mathscr{C} = \mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$, on en déduit un diagramme commutatif où les applications λ sont obtenues à partir des foncteurs d'extensions des scalaires aux complétés

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathscr{K}^S(\mathscr{C}) & \longrightarrow & \mathscr{K}_1(A) & \xrightarrow{\delta} \\
& \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_{1,K}} & \\
0 \longrightarrow & \coprod_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)} \mathscr{K}^S(\mathscr{C}_\mathfrak{p}) & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)} \mathscr{K}_1(A_\mathfrak{p}) & \longrightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C}) & \xrightarrow{\nu} & \mathscr{K}^S_0(\mathscr{C}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathscr{K}_0(A) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_{0,\mathrm{rel}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_{0,K}} \\
\prod_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)} \mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C}_\mathfrak{p}) & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)} \mathscr{K}^S_0(\mathscr{C}_\mathfrak{p}) & \longrightarrow & \prod_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)} \mathscr{K}_0(A_\mathfrak{p})
\end{array}$$

Soit $J\mathscr{K}_1(A)$ le sous-groupe de $\prod_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)}\mathscr{K}_1(A_\mathfrak{p})$ formé des éléments $(x_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)}$ tels que $x_\mathfrak{p}$ appartienne à $\mathscr{H}(\mathscr{C}_\mathfrak{p}(\mathfrak{T}))$ pour presque tout $\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)$.

La commutativité du diagramme précédent et la proposition 1.11 montrent que l'image de $\lambda_{1,K}$ est incluse dans $J\mathscr{K}_1(A_\mathfrak{p})$ et que $\prod_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)}\mathscr{H}^S(\mathscr{C}_\mathfrak{p})$ est inclus dans $J\mathscr{K}_1(A)$. On note $U^S(\mathscr{C})$ le groupe $\prod_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)}\mathscr{H}^S(\mathscr{C}_\mathfrak{p})$ et en particulier pour $\mathscr{C}=\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{T})$, on pose $U^S(\mathscr{C})=U^S(\mathfrak{T})$.

Le lemme du serpent appliqué au diagramme précédent, donne donc le théorème suivant:

THÉORÈME 1.13. *Pour $\mathscr{C}=\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{T})$ ou $\mathscr{C}=\mathscr{C}(\mathfrak{T})$, il existe une suite exacte*

$$\mathscr{K}_1(A)\xrightarrow{\lambda_{1,K}}\frac{J\mathscr{K}_1(A)}{U^S(\mathscr{C})}\xrightarrow{\partial}\tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C})\longrightarrow 0.$$

2. GROUPES DE GROTHENDIECK ET GROUPES DE WHITEHEAD D'UNE ALGÈBRE

Soit K un corps et A une K-algèbre de dimension finie.

On se propose, dans ce paragraphe, d'étudier la structure de $\mathscr{G}_0(A)$ et $\mathscr{K}_0(A)$, ainsi que l'action du groupe des automorphismes de K sur ces groupes. Si K est assez gros, on établit une dualité entre $\mathscr{G}_0(A)$ et $\mathscr{K}_0(A)$ stable par cette action. Ces résultats généralisent les propriétés bien connues des caractères des groupes finis (voir [16]).

On se propose aussi d'étudier la structure des groupes de Whitehead, $\mathscr{G}_1(A)$ et $\mathscr{K}_0(A)$. La situation est plus compliquée que pour $\mathscr{G}_0(A)$ et $\mathscr{K}_0(A)$. On montre tout de même que si K est assez gros, il existe un isomorphisme de $\mathscr{G}_1(A)$ sur $\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(A),K^*)$ commutant avec l'action du groupe des automorphismes de K. On retrouve ainsi la définition de l'application Det introduite par A. Fröhlich [6].

Comme A est artinien, l'ensemble $\mathscr{B}_A$ des classes d'isomorphisme de A-modules simples est une base de $\mathscr{G}_0(A)$ sur $\mathbb{Z}$. Soit $\mathrm{Rad}(A)$ le radical de Jacobson de A. L'application canonique $\mathscr{G}_0(A/\mathrm{Rad}(A))$ dans $\mathscr{G}_0(A)$ est un isomorphisme [1, p. 455]. L'algèbre $A/\mathrm{Rad}(A)$, étant sans radical et artinienne, est semi-simple; d'où $\mathscr{G}_0(A/\mathrm{Rad}(A))$ est égal à $\mathscr{K}_0(A/\mathrm{Rad}(A))$. Comme A est artinien, $\mathrm{Rad}(A)$ est nilpotent; donc l'application $M\mapsto M/\mathrm{Rad}(A)M$ définit un isomorphisme de $\mathscr{K}_0(A)$ sur $\mathscr{K}_0(A/\mathrm{Rad}(A))$. Pour tout $[S]\in\mathscr{B}_A$, il existe un A-module projectif P_S unique à isomorphisme près tel que $[S]=[P_S/\mathrm{Rad}(A)P_S]$. On voit donc que $\mathscr{K}_0(A)$ est libre avec pour base l'ensemble $\mathscr{B}_{A'}$ égal à $\{[P_S],[S]\in\mathscr{B}_A\}$.

Comme précédemment $\mathscr{G}_1(A/\mathrm{Rad}(A))$ est isomorphe à $\mathscr{G}_1(A)$ [1, p. 455]; mais il n'en est plus de même en général pour $\mathscr{K}_1(A)$ et $\mathscr{K}_1(A/\mathrm{Rad}(A))$. Le groupe $\mathscr{G}_1(A/\mathrm{Rad}(A))$ se décrit à l'aide de la base $\mathscr{B}_A$ de la façon suivante: soit $[S] \in \mathscr{B}_A$, D_S le commutant de S, alors $\mathscr{G}_1(A/\mathrm{Rad}(A))$ est isomorphe à $\prod_{[S]\in\mathscr{B}_A} D_S^*/[D_S^*, D_S^*]$ où $[D_S^*, D_S^*]$ désigne le sous-groupe des commutateurs de D_S^*. L'algèbre $A/\mathrm{Rad}(A)$ étant semi-simple, $\mathscr{K}_1(A/\mathrm{Rad}(A))$ est isomorphe à $\mathscr{G}_1(A/\mathrm{Rad}(A))$ et au quotient de $GL(A/\mathrm{Rad}(A)) = \varinjlim GL_n(A/\mathrm{Rad}(A))$ par son sous-groupe des commutateurs (voir [1]).

Soit P un A-module projectif et M un A-module quelconque, l'ensemble $\mathrm{Hom}_A(P, M)$ a une structure de K-espace vectoriel. On obtient une fonction bilinéaire de P et de M dans $\mathscr{K}_0(K)$, grâce au fait que P est supposé projectif; d'où en identifiant $\mathscr{K}_0(K)$ et $\mathbb{Z}$ au moyen de l'application de dimension sur K, on obtient une forme bilinéaire, notée $\langle\ ,\ \rangle_A$ de $\mathscr{K}_0(A) \times \mathscr{G}_0(A)$ dans $\mathbb{Z}$.

Soit α un A-automorphisme de M, l'application $f \mapsto \alpha \circ f$ est un endomorphisme de K-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_A(P, M)$, encore noté α; comme précédemment on obtient une fonction bilinéaire de P et de (M, α) dans $\mathscr{K}_1(K)$; d'où en identifiant $\mathscr{K}_1(K)$ et K^* au moyen de l'application déterminant sur K, on obtient une fonction bilinéaire de $\mathscr{K}_0(A) \times \mathscr{G}_1(A)$ dans K^*. On la note $\det_A$.

Le corps K est dit assez gros, relativement à A, si pour tout A-module simple S, le commutant de S est isomorphe à K. Une extension $\bar{K}$ de K est dite assez grosse, relativement à A, si les commutants des $\bar{K} \otimes_K A$-modules simples sont des corps isomorphes à $\bar{K}$.

PROPOSITION 2.1. *La forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_A$ est non dégénérée. Si K est assez gros, cette forme met en dualité $\mathscr{G}_0(A)$ et $\mathscr{K}_0(A)$.*

Démonstration. Soient S et S' deux A-modules simples. Comme S est annulé par $\mathrm{Rad}(A)$, $\mathrm{Hom}_A(P_{S'}, S)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(S', S)$. Si $[S] \neq [S']$, on en conclue que $[P_{S'}]$ et $[S]$ sont orthogonaux. Si $[S] = [S']$, $\mathrm{Hom}_A(P_{S'}, S)$ est isomorphe au commutant de S. Les bases $\mathscr{B}_A$ et $\mathscr{B}'_A$ sont orthogonales; la forme $\langle\ ,\ \rangle_A$ est donc non dégénérée. De plus si K est assez gros, $\mathrm{Hom}_A(S', S)$ est isomorphe à K ou est nul. Les bases $\mathscr{B}_A$ et $\mathscr{B}'_A$ sont duales l'une de l'autre par rapport à cette forme. Donc $\mathscr{G}_0(A)$ (resp. $\mathscr{K}_0(A)$) est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(A), \mathbb{Z})$ (resp. $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}_0(A), \mathbb{Z})$).

PROPOSITION 2.2. *Soit* Det *l'application de $\mathscr{G}_1(A)$ dans* $\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(A), K^*)$ *définie par: pour tout $x \in \mathscr{G}_1(A)$,* $\mathrm{Det}(x)$ *est l'homomorphisme qui à ρ dans $\mathscr{K}_0(A)$ associe* $\det_A(\rho, x) = \mathrm{Det}_\rho(x)$. *Si K est assez gros l'application* Det *est un isomorphisme de $\mathscr{G}_1(A)$ dans* $\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(A), K^*)$.

Démonstration. Soit S un A-module simple et soit f_S un homomorphisme de $\mathscr{K}_0(A)$ dans K^* tel que $f_S(\chi) = 1$ pour tout $\chi \in \mathscr{B}'_A$ différent de $[P_S]$. Comme K est assez gros, le commutant de S est égal à K; l'homothétie α de rapport $f_S([P_S])$ est un A-automorphisme de S. On a $\mathrm{Det}([S, \alpha]) = f_S$. Comme les applications f_S engendrent $\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(A), K^*)$ lorsque S parcourt

$\mathscr{B}_A$, l'application Det est surjective. L'injectivité découle du fait que $\mathscr{G}_1(A)$ et Hom $(\mathscr{K}_0(A), K^*)$ sont tous les deux isomorphes à $\prod_{S\in\mathscr{B}_A}(K^*)$.

Remarque 1. L'application Det_A peut être dégénérée à gauche même si K est assez gros (par exemple prendre $A=\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments). Si K n'est pas assez gros, l'application Det peut être ni surjective ni injective (par exemple, prendre pour A une extension L de K, galoisienne; les éléments de norme 1 sur K sont dans le noyau de Det et l'application Det est surjective si et seulement si l'application norme de L^* dans K^* est surjective).

Remarque 2. En identifiant $\mathscr{G}_1(A)$ et $\prod_{S\in\mathscr{B}_A} D_S^*|[D_S^*, D_S^*]$, on se ramène au cas où A est un corps. Le groupe $\mathscr{G}_1(A)$ est donc isomorphe à $A^*/[A^*,A^*]$ et $\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(A),K^*)$ à K^*, l'application Det devient l'homomorphisme norme de A^* dans K^* (voir [2], §. 12, n° 2]).

Pour la suite de ce paragraphe, on suppose que *tous les A-modules simples sont séparables sur K* (voir [2, §. 7, n° 5]). Cette hypothèse entraîne que les centres des commutants des A-modules simples sont des extensions séparables de K et qu'il existe des extensions galoisiennes $\bar{K}$ de K assez grosses.

Soit $\bar{K}$ une extension galoisienne de K de groupe de Galois G. On pose $\bar{A}=\bar{K}\otimes_K A$. Soit M un $\bar{A}$-module de type fini et α un $\bar{A}$-automorphisme de M. Pour tout $g\in G$, on définit sur le groupe additif M une nouvelle structure de $\bar{A}$-module en posant:

$$\forall\lambda\in\bar{K},\qquad \forall a\in A,\qquad \forall m\in M\quad (k\otimes a)\cdot m=(g^{-1}(k)\otimes a)\,m.$$

On note M^g le $\bar{A}$-module ainsi défini. L'application $\bar{A}$-linéaire α-définit une application, encore notée α, sur M^g. Le groupe G opère donc sur les quatre groupes $\mathscr{G}_0(\bar{A})$, $\mathscr{K}_0(\bar{A})$, $\mathscr{G}_1(\bar{A})$ et $\mathscr{K}_1(\bar{A})$.

L'extension des scalaires de K à $\bar{K}$ définit un homomorphisme, noté $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$, de $\mathscr{G}_i(A)$ dand $\mathscr{G}_i(\bar{A})$ et de $\mathscr{K}_i(A)$ dans $\mathscr{K}_i(\bar{A})$ respectivement, pour $i=0,1$. Il est clair que l'image de $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ est incluse dans le sous-groupe formé des éléments fixes pour G.

PROPOSITION 2.3. *Soit H un sous-groupe d'indice fini de G.*

(1) *Le groupe $\mathscr{G}_0(\bar{A})^H$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A})^H$) est un facteur direct de $\mathscr{G}_0(\bar{A})$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A})$) de base l'ensemble $\sum_{\sigma\in H/G_\chi\cap H}\chi^\sigma$ pour χ parcourant $\mathscr{B}_{\bar{A}}$ (resp. $\mathscr{B}_{\bar{A}}^L$) où G_χ désigne le sous-groupé d'isotropie de χ dans G.*

(2) $\forall x\in\mathscr{K}_0(\bar{A})$, $\forall y\in\mathscr{G}_0(\bar{A})$, $\forall z\in\mathscr{G}_1(\bar{A})$ *et* $\forall g\in G$, *on a*

$$\langle x,y\rangle_{\bar{A}}=\langle x^g,y^g\rangle_{\bar{A}}\qquad et\qquad g(\det_{\bar{A}}(x,z))=\det_{\bar{A}}(x^g,z^g).$$

(3) *Si $\bar{K}$ est assez gros, $\mathscr{G}_0(\bar{A})^H$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A})^H$, $\mathscr{G}_1(\bar{A})^H$) est isomorphe à* $\mathrm{Hom}_H(\mathscr{K}_0(\bar{A}),\mathbb{Z})$ (*resp.* $\mathrm{Hom}_H(\mathscr{G}_0(\bar{A})),\mathbb{Z})$, $\mathrm{Hom}_H(\mathscr{K}_0(\bar{A}),\ K^*)$).

Démonstration. Elle découle immédiatement des définitions et des propositions 2.1 et 2.2. La première partie de la proposition ne s'applique pas à $\mathscr{G}_1(\bar{A})$ et $\mathscr{K}_1(\bar{A})$ (prendre pour A le corps K).

PROPOSITION 2.4. *Soit M un $\bar{A}$-module de type fini (resp. projectif) et soit $\rho = [M]$ la classe de M dans $\mathscr{G}_0(\bar{A})$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A})$). Le sous-groupe d'isotropie G_ρ de ρ dans G est d'indice fini. Il existe un entier n tel que $n \sum_{\sigma \in G/G_\rho} \rho^\sigma$ appartienne à l'image de* $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$.

Démonstration. Comme $\bar{M}$ et $\bar{A}$ sont des $\bar{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, on voit qu'il existe une extension finie K' de K incluse dans $\bar{K}$ et un $K' \otimes_K A$-module de type fini M' tel que $\bar{M}$ soit isomorphe à $\bar{K} \otimes_{K'} M'$ (il suffit de prendre le corps engendré par les coefficients des matrices des endomorphismes définis par les éléments d'une base de A sur K sur une base de $\bar{M}$ sur $\bar{K}$). Le groupe d'isotropie de ρ contient le groupe de Galois H de $\bar{K}$ sur K'. L'application qui à $\lambda \otimes m' \in \bar{K} \otimes_K M'$ associe $(\sigma^{-1}(\lambda) \otimes m')_{\sigma \in G/H} \in (\oplus_{G/H} (\bar{K} \otimes_{K'} M')^\sigma)$ est un isomorphisme de $\bar{A}$-modules. On en déduit que $[G_\rho : H] \sum_{\sigma \in G/G_\rho} \rho^\sigma = [\bar{K} \otimes_K M]$.

On appelle indice de Schur de $\rho \in \mathscr{G}_0(\bar{A})$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A})$) (relativement à l'extension $\bar{K}/K$) le plus petit entier n vérifiant la condition de la proposition précédente. On le note $s(\rho, \bar{K}/K)$.

PROPOSITION 2.5. *L'application* $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ *est un homomorphisme injectif de $\mathscr{G}_0(A)$ (resp. $\mathscr{K}_0(A)$) dans $\mathscr{G}_0(\bar{A})^G$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A})^G$).*

Démonstration. Soit S un A-module simple; comme $\mathrm{Rad}(\bar{A})$ est isomorphe à $\bar{K} \otimes_K \mathrm{Rad}(A)$ (car $\bar{K}$ est une extension séparable de K), $\bar{K} \otimes_K S$ est annulé par $\mathrm{Rad}(\bar{A})$; $\bar{K} \otimes_K S$ est donc un $\bar{A}$-module semi-simple. Soit T un A-module simple non isomorphe à S; $\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(\bar{K} \otimes_K S, \bar{K} \otimes_K T)$, qui est isomorphe à $\bar{K} \otimes_K \mathrm{Hom}(S, T)$ est nul. On en tire que $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ transforme la base $\mathscr{B}_A$ (resp. $\mathscr{B}'_A$) en un système libre. Donc l'application $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ est injective.

PROPOSITION 2.6. *L'image de l'application* $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ *est le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathscr{G}_0(\bar{A})^G$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A})^G$) engendré par $s(\chi, \bar{K}/K) \sum_{\sigma \in G/G_\chi} \chi^\sigma$, où $\chi \in \mathscr{B}_{\bar{A}}$ (resp. $\mathscr{B}'_{\bar{A}}$). Si $s(\chi, \bar{K}/K) = 1$, $\forall \chi \in \mathscr{B}_{\bar{A}}$, l'application* $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ *est un homomorphisme sur $\mathscr{G}_0(\bar{A})^G$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A})^G$). Si K est assez gros $\mathscr{G}_0(\bar{A})^G$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A})^G$) est égal à $\mathscr{G}_0(\bar{A})$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A})$).*

Démonstration. La première partie est une conséquence immédiate des propositions 2.5 et 2.4. Soit S un A-module simple et soit $\bar{S}$ un sous-$\bar{A}$-module simple de $\bar{K} \otimes_K S$, qui est semi-simple. La démonstration de la proposition 2.5, montre que le commutant de $\bar{K} \otimes_K S$ est isomorphe à $\bar{K}$, si K est assez gros; donc $\bar{K} \otimes_K S$ est simple et isomorphe à $\bar{S}$. Ceci montre l'égalité $\mathscr{G}_0(\bar{A}) = \mathscr{G}_0(\bar{A})^G$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A}) = \mathscr{K}_0(\bar{A})^G$).

On dit que la K-algèbre A est décomposèe si les commutants des A-modules simples sont des corps commutatifs. Alors pour toute extension galoisienne $\bar{K}$ de K on a $s(\chi, \bar{K}/K) = 1$, $\forall \chi \in \mathscr{B}_{\bar{A}}$ ou $\mathscr{B}_{\bar{A}}^{\perp}$ et l'application $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ est une injection directe.

Pour la suite on suppose que $\bar{K}$ est une extension assez grosse de K.

THÉORÈME 2.7. *Par extension des scalaires et dualité, on obtient deux homomorphismes injectifs*:

$$\mathscr{G}_0(A) \to \mathrm{Hom}_G(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \mathbb{Z}),$$

$$\mathscr{K}_0(A) \to \mathrm{Hom}_G(\mathscr{G}_0(\bar{A}), \mathbb{Z}).$$

Ces deux homomorphismes sont surjectifs si et seulement si la K-algèbre A est décomposée.

Si A est une K algèbre décomposée, par dualité et extension des scalaires, on obtient un isomorphisme de $\mathscr{G}_1(A)$ *sur* $\mathrm{Hom}_G(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{K}^*)$.

Démonstration. Comme $\bar{K}$ est assez gros, la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_{\bar{A}}$ met en dualité $\mathscr{K}_0(\bar{A})$ et $\mathscr{G}_0(\bar{A})$ et l'application Det est un isomorphisme de $\mathscr{G}_1(\bar{A})$ sur $\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{K}^*)$. Si A est décomposée, l'application $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ est un isomorphisme de $\mathscr{G}_0(A)$ (resp. $\mathscr{K}_0(A)$) sur $\mathscr{G}_0(\bar{A})^G$ (resp. $\mathscr{K}_0(\bar{A})^G$). Le groupe $\mathscr{G}_1(A)$ est engendré par les éléments de la forme $[S, \alpha]$ où S est un A-module simple et $\alpha \in \mathrm{End}_A(S)$; $\mathrm{End}_A(S)$ est un corps commutatif si A est supposée décomposée. Le résultat découle alors du fait que $(\bar{K} \otimes_K \mathrm{End}_A(S))^G$ est isomorphe à $\mathrm{End}_A(S)$.

L'homomorphisme d'extension des scalaires de K à $\bar{K}$ n'est pas en général un homomorphisme injectif de $\mathscr{G}_1(A)$ dans $\mathscr{G}_1(\bar{A})$. En effet, comme on l'a vu précédemment, le problème se ramène au cas où A est un corps gauche D. Supposons que K est le centre de D; $\mathscr{G}_1(A)$ est isomorphe à $D^*/[D^*, D^*]$ et si $\bar{K}$ est assez gros, $\mathscr{G}_1(\bar{A})$ est isomorphe à $\bar{K}^*$. L'application $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ devient l'homomorphisme de norme réduite de $D^*/[D^*, D^*]$ dans K^*. Dans ce cas, l'application $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ sera injective si et seulement si le noyau de la norme réduite est inclus dans $[D^*, D^*]$. Toutefois, on a la proposition suivante:

PROPOSITION 2.8. *Supposons que $\bar{K}$ est assez gros. Si K est un corps de nombres ou si K est localement compact, l'application* $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ *est un homomorphisme injectif de* $\mathscr{G}_1(A)$ *dans* $\mathscr{G}_1(\bar{A})$.

Démonstration. Si K est un corps de nombres, c'est le théorème de Wang [17]; si K est localement compact, c'est le théorème de Nakagama et Matsushima [12].

On notera encore Det *le composé de l'homomorphisme* $\mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}$ *et de l'homomorphisme* Det *de* $\mathscr{G}_1(\bar{A})$ dans $\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{K}^*)$. C'est donc un homomorphisme de $\mathscr{G}_1(A)$ dans $\mathrm{Hom}_G(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{K}^*)$.

L'application $A^* \to \mathscr{K}_1(A)$ est surjective [1, p. 366]. Donc si A est semi-simple ($\mathscr{K}_1(A) = \mathscr{G}_1(A)$) l'image de $\mathscr{G}_1(A)$ par l'homomorphisme Det est égal à l'image de A^*; on notera encore $\mathrm{Det}(a)$ l'élément $\mathrm{Det}([A, a])$. Explicitement cela se traduit de la façon suivante:

PROPOSITION 2.9. *Soit $a \in A^*$ et M un $\bar{A}$-module de type fini,* $\mathrm{Det}_{[M]}(a)$ *est le déterminant du $\bar{K}$-endomorphisme de M défini par a.*

Démonstration. On se ramène au cas où A est simple, $\bar{K} = K$ et M est un $\bar{A}$-module simple. L'algèbre A est alors isomorphe à $M_n(\bar{K})$. L'image de a dans $\mathscr{K}_1(A)$ est représentée par $[A, a]$. Les $\bar{K}$-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ et M sont isomorphes à K^n, et les $\bar{K}$-endomorphismes respectifs définis par a sont identiques sur $\bar{K}^n$.

Remarque. On retrouve ainsi, dans le cas où A est une algèbre de groupe $K[\Gamma]$, la définition de l'application Det introduite par A. Fröhlich [6].

Pour la fin de ce paragraphe, on reprend les notations et hypothèses du premier paragraphe, et on note $\bar{R}$ la clôture intégrale de R dans $\bar{K}$, et $\bar{\mathfrak{D}}$ l'ordre $\bar{R} \otimes_R \mathfrak{D}$. On suppose que $\bar{K}$ est une extension assez grosse de K.

PROPOSITION 2.10. *On a*:

$$\mathrm{Det}(\mathscr{H}(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))) = \mathrm{Det}(\mathscr{K}_1(A)) \cap \mathrm{Hom}_G(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{R}^*).$$

Démonstration. On démontre tout d'abord le résultat lorsque R est complet pour la valuation discréte associée à un idéal premier $\mathfrak{p}$. Il est clair que $\mathrm{Det}(\mathscr{H}(\mathscr{C}(\mathfrak{D})))$ est inclus dans $\mathrm{Det}(\mathscr{K}_1(A)) \cap \mathrm{Hom}_G(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{R}^*)$, le diagramme suivant étant commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{K}_1(\mathscr{C}(\mathfrak{D})) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^K} & \mathscr{K}_1(A) \\
{\scriptstyle \mathrm{Ext}_R^{\bar{R}}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Ext}_K^{\bar{K}}} \\
\mathscr{K}_1(\mathscr{C}(\bar{\mathfrak{D}})) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}_{\bar{R}}^{\bar{K}}} & \mathscr{K}_1(\bar{A}).
\end{array}$$

Il est aussi clair que le résultat est vrai si K est assez gros.

Le groupe des éléments $x \in \mathscr{K}_1(A)$ tels que Det $(x) \in \mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{R}^*)$ est engendré par les éléments de la forme $[S, \alpha]$ où S est un A-module simple. Avec les notations précédentes on a $[\bar{K} \otimes_K S] = [\bigoplus_{\omega \in G/G_\chi} (\bar{S}^n)^\omega]$ où $\bar{S}$ est un $\bar{A}$-module simple et n est l'indice de Schur de $[\bar{S}] = \chi$.

On choisit $\bar{M}$ un sous-$\bar{\mathfrak{D}}$-module de $\bar{S}^n$ et soit M le sous $\mathfrak{D}$-module de $\bigoplus_\omega \bar{M}^\omega$ formée des éléments m_ω tels que $m_\omega = m_{\omega'}$, $\forall \omega, \omega'$. On a $\bar{R} \otimes_R M = \bar{M}$. Le A-automorphisme α de S se décompose sous la forme $\bigoplus_{\omega \in G/G_\chi} \alpha_\omega$ où $\alpha_\omega \in \mathrm{Aut}_A((\bar{S}^n)^\omega)$. On a $M_n(K) \simeq \mathrm{Aut}_A(\bar{S}^n)$ et $\det(\alpha_\omega)$ est un entier; donc α_ω est un automorphisme de M^ω et par suite α est un $\mathfrak{D}$-automorphisme de M. Ce qui montre que $[S, \alpha]$ appartient à $\mathscr{H}(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))$.

Lorsque R n'est plus complet, le résultat découle de la commutativité du diagramme précédent le théorème 1.13.

COROLLAIRE 2.11. *Soit* $S\mathscr{K}_1(A)$ *le noyau de l'application* Det *de* $\mathscr{K}_1(A)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(A), K^*)$, *alors quel que soit* $S \subset \mathscr{P}(R)$, $S\mathscr{K}_1(A)$ *est inclus dans* $\mathscr{H}^S(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))$.

Démonstration. On a $S\mathscr{K}_1(A) \subset \mathscr{H}(\mathscr{C}(\mathfrak{D})) \subset \mathscr{H}^S(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))$.

On note $\mathscr{P}(K)$ l'ensemble des places de $\bar{K}$. Soit $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(K)$ et $\mathfrak{P}$ une place de $\bar{K}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Si $D_{\mathfrak{P}}$ désigne le groupe de décomposition de $\mathfrak{P}$, les autres places de $\bar{K}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ sont de la forme $\mathfrak{P}^\sigma$ pour σ parcourant un système de représentants de G modulo $D_{\mathfrak{P}}$. On identifie les trois algèbres commutatives $\oplus_{\sigma \in G/D_{\mathfrak{P}}} \bar{K}_{\mathfrak{P}^\sigma}$, $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[D_{\mathfrak{P}}]} \bar{K}_{\mathfrak{P}}$ et $K_{\mathfrak{p}} \otimes_K \bar{K}$.

Soit M un $\bar{K} \otimes_K A$-module, le $K_{\mathfrak{p}}$-module $K_{\mathfrak{p}} \otimes_K M$ s'identifie à $\oplus_{\sigma \in G/D_{\mathfrak{P}}} (\bar{K}_{\mathfrak{P}^\sigma} \otimes_{\bar{K}} M)$. On définit ainsi un isomorphisme, noté $\mathrm{Ext}_K^{K_{\mathfrak{P}}}$, de $\mathscr{G}_0(\bar{A})$ dans $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[D_{\mathfrak{P}}]} \mathscr{G}_0(\bar{K}_{\mathfrak{P}} \otimes_K A)$ par $\mathrm{Ext}_K^{K_{\mathfrak{p}}}([M]) = \sum_{\sigma \in G/D_{\mathfrak{P}}} \sigma \otimes [\bar{K}_{\mathfrak{P}} \otimes_{\bar{K}} M]$. Comme $\mathbb{Z}[G]$ est un $\mathbb{Z}[D_{\mathfrak{P}}]$-module libre, on en déduit un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_{D_{\mathfrak{P}}}(\mathscr{K}_0(\bar{K}_{\mathfrak{P}} \otimes_K A), \bar{K}_{\mathfrak{P}}^*)$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)}(\mathscr{K}_0(\bar{K} \otimes_K A), \oplus_{\sigma \in G/D_{\mathfrak{P}}} \bar{K}_{\mathfrak{P}^\sigma}^*)$ donné par le produit tensoriel par $\mathbb{Z}[G]$ sur $\mathbb{Z}[D_{\mathfrak{P}}]$. Cet homomorphisme commute avec les applications transposées de l'extension des scalaires. On peut donc par passage à la limite inductive définir un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_{G_{K_{\mathfrak{p}}}}(\mathscr{K}_0(\bar{K}_{\mathfrak{P}} \otimes_K A), \bar{K}_{\mathfrak{P}}^*)$ sur $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), (K_{\mathfrak{p}} \otimes_K \bar{Q})^*)$ où cette fois $\bar{K}_{\mathfrak{P}}$ (resp. $\bar{K}$) désigne une clôture algébrique de $K_{\mathfrak{p}}$ (resp. K) de groupe de Galois $G_{K_{\mathfrak{p}}}$ (resp. G_K).

On déduit des remarques précédentes et du corollaire 2.11 la proposition suivante dans laquelle $J(\bar{K})$ désigne le groupe des idèles de $\bar{K}$:

PROPOSITION 2.12. *L'application* Det *se prolonge en une application encore, notée* Det, *de* $J\mathscr{K}_1(A)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), J(\bar{K}))$. *C'est un isomorphisme si et seulement si pour tout* $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R)$, *l'application* Det *de* $\mathscr{K}_1(A_{\mathfrak{p}})$ *dans* $\mathrm{Hom}_{D_{\mathfrak{P}}}(\mathscr{K}_0(\bar{A}_{\mathfrak{P}}), \bar{K}_{\mathfrak{P}}^*)$ *est un isomorphisme.*

3. S-GROUPES DE GROTHENDIECK RELATIFS

Soit R un anneau de Dedekind, K son corps des fractions et A une K-algèbre, séparable, semi-simple de dimension finie. Soit $\mathfrak{D}$ un ordre de R dans A.

On se propose dans ce paragraphe de décrire les groupes $\mathscr{G}^S_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ et $\mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$. La proposition 1.12 permet de se ramener au cas local et complet. Plus précisément on fait pour la suite de ce paragraphe les hypothèses suivantes:

On suppose que K *est un corps local* muni d'une valuation discrète v_K associée à un idéal premier $\mathfrak{p}$, que R est l'anneau de valuation de K. On suppose que K est complet pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique définie par v_K. On note k le corps résiduel $R/\mathfrak{p}$. On suppose de plus que k *est fini*. Cette dernière hypothèse entraîne que K est localement compact et qu'il existe une extension galoisienne finie k' de k assez grosse relativement à $k' \otimes_k (\mathfrak{D}/\mathfrak{p}\mathfrak{D})$. On peut donc appliquer le théorème 2.7. Elle entraîne d'autre part qu'il existe une extension K' de K non ramifiée, galoisienne, d'extension résiduelle k'/k. On déduit de [15, §. XII, 2, p. 192], que l'algèbre $K' \otimes_K A$ est décomposée.

L'hypothèse de séparabilité faite sur A entraîne qu'il existe une extension galoisienne $\bar{K}$ de K assez grosse relativement à A. On peut en particulier prendre pour $\bar{K}$ une clôture galoisienne de K. On note G_K le groupe de Galois de $\bar{K}$ sur K, $\bar{R}$ la clôture intégrale de R dans $\bar{K}$, $\bar{A}$ la $\bar{K}$-algèbre $\bar{K} \otimes_K A$, $\bar{\mathfrak{D}}$ l'ordre $\bar{R} \otimes_R \mathfrak{D}$ de $\bar{R}$ dans $\bar{A}$.

Il suffit donc de décrire $\mathscr{G}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$, $\mathscr{K}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ et $\mathscr{G}^{\mathfrak{p}}_{\oplus,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D}) = \mathscr{K}^{\mathfrak{p}}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ et plus précisément les sous-groupes de $\mathscr{K}_1(A)$: $\mathscr{H}(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))$, $\mathscr{H}(\mathscr{C}_{lp}(\mathfrak{D})$ et $\mathscr{H}^{\mathfrak{p}}(\mathscr{C}(\mathfrak{D})) = \mathscr{H}^{\mathfrak{p}}(\mathscr{C}^{\mathfrak{p}}_{lp}(\mathfrak{D}))$.

Proposition 3.1. *Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathfrak{D})$ ou $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{lp}(\mathfrak{D})$. Si S est non vide ou $\mathscr{C} \neq \mathscr{C}_{lp}(\mathfrak{D})$, l'application δ de $\mathscr{K}_1(A)$ dans $\mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C})$ se factorise en un homomorphisme Δ rendant le diagramme suivant commutatif:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{Det}(\mathscr{K}_1(A))/\mathrm{Det}(\mathscr{H}^S(\mathscr{C})) \arrow[rr, "\Delta"] & & \mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C}) \\
& \mathscr{K}_1(A) \arrow[ul, "\mathrm{Det}"] \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Si S est vide et $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{lp}(\mathfrak{D})$, cette factorisation a lieu si et seulement si $S\mathscr{K}_1(A)$ est inclus dans $\mathscr{H}(\mathscr{C}_{lp}(\mathfrak{D}))$. En outre, Δ est unique et injective; elle est surjective si et seulement si l'application ε de $\mathscr{K}^S_0(\mathscr{C})$ dans $\mathscr{K}_0(A)$ est injective.

Démonstration. Par définition, le noyau de δ est $\mathscr{H}^S(\mathscr{C})$. Le noyau de l'application Det de $\mathrm{Det}(\mathscr{K}_1(A))/\mathrm{Det}(\mathscr{H}^S(\mathscr{C}))$ est $\mathscr{H}^S(\mathscr{C}) \cdot S\mathscr{K}_1(A)$. Le résultat découle du théorème de factorisation, du théorème 1.10 et du corollaire 2.11.

Notation. Pour $\mathscr{C}$ sous-catégorie de $\mathscr{C}(\mathfrak{D})$, on pose

$$H^S(\mathscr{C}) = \mathrm{Det}(\mathscr{H}^S(\mathscr{C})) \subset \mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{K}^*).$$

Comme R est un anneau local, l'aplication qui à $a \in \mathfrak{D}^*$ associe l'élément $[\mathfrak{D}, a]$ de $\mathscr{K}_1(\mathfrak{D})$ est un homomorphisme surjectif. En utilisant l'abus de notation du paragraphe 2, on a:

PROPOSITION 3.2. $H(\mathscr{C}_{lp}(\mathfrak{D})) = \mathrm{Det}(\mathfrak{D}^*)$.

D'après la proposition 2.10, on a $H(\mathscr{C}(\mathfrak{D})) = \mathrm{Det}(\mathscr{K}_1(A)) \cap \mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{R}^*)$. Il reste à dèterminer $H^{\mathfrak{p}}(\mathscr{C}^{\mathfrak{p}}_{lp}(\mathfrak{D})) = H^{\mathfrak{p}}(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))$. *Pour cela on note e l'homomorphisme de* $\mathscr{K}_0(\mathfrak{D})$ *dans* $\mathscr{K}_0(A)$ *obtenu à partir de l'extension des scalaires de R à K* (voir [16]).

Le théorème 1.10 apliqué à R donne une suite exacte

$$R^* \longrightarrow K^* \xrightarrow{\delta} \mathscr{K}_{0,\mathrm{rel}}(R) \xrightarrow{r} \mathscr{K}_0(R) \longrightarrow \mathscr{K}_0(K) \longrightarrow 1$$

où $\mathscr{K}_{0,\mathrm{rel}}(R)$ s'identifie au groupe des idèaux de R (ici isomorphe à K^*/R^*), $\mathscr{K}_0(K)$ s'identifie à $\mathbb{Z}$ par l'application de dimension sur K et $\mathscr{K}_0(R)$ s'identifie au produit de$\mathbb{Z}$ et du groupe des classes d'idéaux de R.

Comme au paragraphe précédent on peut définir une dualité entre $\mathscr{K}^{\mathfrak{p}}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ et $\mathscr{K}_0(\mathfrak{D})$. Au couple formé d'un élément $[P]$ dans $\mathscr{K}_0(\mathfrak{D})$ et d'un élément $[M, \alpha, N]$ de $\mathscr{K}^{\mathfrak{p}}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ on associe l'élément $[\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(R, M), \alpha, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(P, N)]$ de $\mathscr{K}_{0,\mathrm{rel}}(R)$ identifié à K^*/R^*. Grâce au fait que P est supposé projectif on obtient ainsi une application bilinéaire de $\mathscr{K}_0(\mathfrak{D}) \times \mathscr{K}^{\mathfrak{p}}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ dans K^*/R^*, on la note $\det_{\mathfrak{D}}$.

On note $\overline{\mathrm{Det}}$ l'application qui à $[M, \alpha, N] \in \mathscr{K}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ associe l'homomorphisme de $\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(\mathfrak{D}), K^*/R^*)$ donné par la dualité précédente.

PROPOSITION 3.3. *On a la propriété suivante*:

$$\forall x \in \mathscr{K}_0(\mathfrak{D}). \qquad \forall y \in \mathscr{K}_1(A), \qquad \det_{\mathfrak{D}}(x, \delta(y)) = \det_A(e(x), y)\, R^*.$$

Le résultat est clair et se traduit par la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}_1(A) \arrow[r, "\mathrm{Det}"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(A), K^*) \arrow[d, "{}^t e"] \\
\mathscr{K}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D}) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Det}}"] & \mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(\mathfrak{D}), K^*/R^*)
\end{tikzcd}$$

où ${}^t e$ est l'application transposée de l'application e de $\mathscr{K}_0(\mathfrak{D})$ dans $\mathscr{K}_0(A)$.

On notera encore $\overline{\mathrm{Det}}$ le composé de l'application d'extension des scalaires de $\mathscr{K}^{\mathfrak{p}}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ dans $\mathscr{K}^{\mathfrak{p}}_{0,\mathrm{rel}}(\bar{\mathfrak{D}})$ et de l'application $\overline{\mathrm{Det}}$ de $\mathscr{K}^{\mathfrak{p}}_{0,\mathrm{rel}}(\bar{\mathfrak{D}})$ dans $\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(\bar{\mathfrak{D}}), \bar{K}^*/\bar{R}^*)$. C'est donc un homomorphisme de $\mathscr{K}^{\mathfrak{p}}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ dans $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{\mathfrak{D}}), \bar{K}^*/\bar{R}^*)$.

PROPOSITION 3.4. *L'application* $\overline{\mathrm{Det}}$ *de* $\mathscr{K}^{\mathfrak{p}}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ *dans* $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{\mathfrak{D}}), \bar{K}^*/\bar{R}^*)$ *est un homomorphisme injectif.*

Démonstration. Il est clair qu'il suffit de supposer que $\bar{K}$ est une extension assez grosse de degré fini sur K. Le corps $\bar{K}$ est alors un corps local complet. Soit $\mathfrak{P}$ son idéal de valuation. Comme $\mathfrak{P}$ est inclus dans le radical de Jacobson de $\mathfrak{D}$, l'application de réduction modulo $\mathfrak{P}$ est un isomorphisme de $\mathscr{K}_0(\bar{\mathfrak{D}})$ sur $\mathscr{K}_0(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{P}\bar{\mathfrak{D}})$ [1, p. 449]; $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{P}\bar{\mathfrak{D}}$ est une $\bar{k}$-algèbre de dimension finie avec $\bar{k} = \bar{R}/\mathfrak{P}$. On a vue (proposition 1.12) que $\mathscr{K}^{\mathfrak{p}}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ est engendré par les éléments de la forme $[M, 1, N]$ où M et N sont deux $\mathfrak{D}$-réseaux d'un même A-module et $M \subset N$. On en déduit donc un isomorphisme de $\mathscr{K}^{\mathfrak{p}}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D})$ sur $\mathscr{G}^{t}_0(\mathfrak{D})$ le groupe de Grothendieck des $\mathfrak{D}$-modules de torsion. Ce dernier s'identifie à $\mathscr{G}_0(\mathfrak{D}/\mathfrak{p}\mathfrak{D})$, car tout $\mathfrak{D}$-module simple est un $\mathfrak{D}/\mathfrak{p}\mathfrak{D}$-module. L'application de valuation identifie $\bar{K}^*/\bar{R}^*$ à $\mathbb{Z}$ (cette application se traduit sur $\mathscr{K}_{0,\mathrm{rel}}(\bar{R})$ en prenant la longueur des suites de Jordan Hölder des $\bar{R}$-modules de torsion). Il est clair que l'on retrouve ainsi l'homomorphisme de $\mathscr{G}_0(\mathfrak{D}/\mathfrak{p}\mathfrak{D})$ dans $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{D}}), \mathbb{Z})$ décrit au paragraphe 2 appliqué à la k-algèbre $\mathfrak{D}/\mathfrak{p}\mathfrak{D}$.

L'application e commute avec l'extension des scalaires. On note $\bar{e}$ l'homomorphisme correspondant de $\mathscr{K}_0(\bar{\mathfrak{D}})$ dans $\mathscr{K}_0(\bar{A})$. On déduit que l'image de $\bar{e}$, notée $\mathrm{Im}\,\bar{e}$, ne dépend pas du choix de l'extension assez grosse $\bar{K}$.

PROPOSITION 3.5. $H^{\mathfrak{p}}(\mathscr{C}(\mathfrak{D})) = \mathrm{Det}(\mathscr{K}_1(A)) \cap \{f/f(\mathrm{Im}\,\bar{e}) \subset \bar{R}^*\}$.

Démonstration. On utilise la commutativité du diagramme:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{K}_1(A) \arrow[r, "\mathrm{Det}"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{K}^*) \arrow[d, "{}^t\bar{e}"] \\ \mathscr{K}_{0,\mathrm{rel}}(\mathfrak{D}) \arrow[r, "\overline{\mathrm{Det}}"] & \mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{\mathfrak{D}}), \bar{K}^*/\bar{R}^*) \end{tikzcd}$$

et le fait que l'application $\overline{\mathrm{Det}}$ est injective (proposition 2.8).

PROPOSITION 3.6. *On a* $\mathscr{H}^S(\mathscr{C}(\mathfrak{D})) \supset \mathscr{H}(\mathscr{C}(\mathfrak{D})) \supset \mathscr{H}(\mathscr{C}_{lp}(\mathfrak{D}))$.

Si A est une algèbre simple, $\mathscr{H}^{\mathfrak{p}}(\mathscr{C}(\mathfrak{D})) = \mathscr{H}(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))$.

Si $\mathfrak{D}$ est un ordre héréditaire, $\mathscr{H}^{\mathfrak{p}}(\mathscr{C}(\mathfrak{D})) = \mathscr{H}(\mathscr{C}(\mathfrak{D})) = \mathscr{H}(\mathscr{C}_{lp}(\mathfrak{D}))$.

Démonstration. Les inclusions sont triviales. Si A est simple, il n'y a qu'une classe de A-module simple et $\mathscr{K}_0(A)$ est isomorphe à $\oplus_{\sigma \in G_K/G_\chi} \mathbb{Z}\chi^\sigma$ si χ est la classe d'un A-module simple. On en déduit que $\bar{e}([\bar{\mathfrak{D}}]) = \sum_{\sigma \in G_K/G_\chi} \chi^\sigma$. Si $f \in \mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{K}^*)$ est une unité sur $\mathrm{Im}\, e$, on en déduit que $f(\chi)$ est une unité, donc $f \in \mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(A), \bar{R}^*)$. Si $\mathfrak{D}$ est héréditaire, $\mathscr{C}_{lp}(\mathfrak{D})$, d'où les égalités.

4. S-GROUPES DES CLASSES D'UN ORDRE ARITHMÉTIQUE

Soit K une extension de degré fini de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_K$ la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K. Soit $\bar{\mathbb{Q}}$ une clôture galoisienne de $\mathbb{Q}$ contenant K, de groupe de Galois G_K, et $\bar{\mathbb{Z}}$ la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}$.

Soit A une K-algèbre semi-simple, de dimension finie. On note $\bar{A}$ la $\bar{\mathbb{Q}}$-algèbre semi-simple $\bar{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} A$.

Soit $\mathfrak{D}$ un ordre de $\mathbb{Z}_K$ dans A, on note $\bar{\mathfrak{D}}$ l'ordre $\bar{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{D}$ de $\mathbb{Z}$ dans $\bar{A}$.

On note $\mathscr{P}(K)$ l'ensemble des places de K et on identifie $\mathscr{P}(\mathbb{Z}_K)$ et l'ensemble des places non archimédiennes de K. On a $\mathscr{P}(K) = \mathscr{P}(\mathbb{Z}_K) \cup \mathscr{P}_\infty(K)$ où $\mathscr{P}_\infty(K)$ est l'ensemble des places archimédiennes de K. L'indexation par un élément $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(K)$ désigne la complétion en $\mathfrak{p}$. On note $J(A)$ (resp. $J(\bar{\mathbb{Q}})$) le groupe des idèles de A (resp. $\bar{\mathbb{Q}}$) et $U(\mathfrak{D})$ le sous-groupe de $J(A)$ formé des idèles $(x_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(K)}$ tels que $x_\mathfrak{p} \in \mathfrak{D}_\mathfrak{p}^*$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}_K)$. On pose $\bar{\mathbb{Q}}_\mathfrak{p} = K_\mathfrak{p} \otimes_K \bar{\mathbb{Q}}$ et $\bar{\mathbb{Z}}_\mathfrak{p} = \mathbb{Z}_\mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{Q}}$. L'application Det se prolonge en un homomorphisme surjectif de $J(A)$ dans $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), J(\bar{\mathbb{Q}}))$ (voir proposition 2.12).

Soit $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}_K)$, on note $P_\mathfrak{p}(\mathfrak{D})$ le sou-groupe de $\mathscr{K}_0(\bar{A})$ engendré par les classes $[M]$ des $\bar{A}$-modules M tels que pour tout $\mathfrak{P}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, $[M_\mathfrak{P}]$ appartient à l'image de $\bar{e}_\mathfrak{P}$.

Soit $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}_\infty(K)$, et soit $\mathfrak{P}$ une place de $\bar{K}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$; par extension des scalaires de $K_\mathfrak{p}$ à $\bar{K}_\mathfrak{P}$, le groupe $\mathscr{K}_0(A_\mathfrak{p})$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathscr{K}_0(\bar{A}_\mathfrak{P})$; soit $\mathscr{K}'_0(\bar{A}_\mathfrak{P})$ le sous-groupe de $\mathscr{K}_0(\bar{A}_\mathfrak{P})$ engendré par les $\bar{A}_\mathfrak{P}$-modules simples n'appartenant pas à $\mathscr{K}_0(A_\mathfrak{p})$ et d'indice de Schur égal à 2. On note $P_\mathfrak{p}(\mathfrak{D})$ le sous-groupe de $\mathscr{K}_0(\bar{A})$ engendré par les classes $[M]$ des $\bar{A}$-modules M tels que pour tout $\mathfrak{P}$-au-dessus de $\mathfrak{p}$, $[M_\mathfrak{p}]$ appartienne à $\mathscr{K}'_0(\bar{A}_\mathfrak{P})$.

Soit $H^S(\mathscr{C}(\mathfrak{D}))$ (resp. $H^S(\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D}))$) le sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), J(\bar{\mathbb{Q}}))$ formé des homomorphismes f tels que

$\forall \mathfrak{p} \in S,$	$f(P_\mathfrak{p}(\mathfrak{D}))_\mathfrak{p} \subset \bar{\mathbb{Z}}_\mathfrak{p}^*;$	
$\forall \mathfrak{p} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}_K) - S,$	$f(\mathscr{K}_0(A))_\mathfrak{p} \subset \bar{\mathbb{Z}}_\mathfrak{p}^*$	(resp. il existe $\alpha \in \mathfrak{D}_\mathfrak{p}^*$ tel que $f(\rho)_\mathfrak{p} = \mathrm{Det}_\rho(\alpha)$, pour tout ρ dans $\mathscr{K}_0(\bar{A})$);
$\forall \mathfrak{p} \in \mathscr{P}_\infty(K),$	$f(P_\mathfrak{p}(\mathfrak{D}))_\mathfrak{p}$	est réel et positif.

THÉORÈME 4.1. *Soit $\alpha \in J(A)$, on note $\mathfrak{D}\alpha$ l'unique $\mathfrak{D}$-module tel que $(\mathfrak{D}\alpha)_\mathfrak{p} = \mathfrak{D}_\mathfrak{p}\alpha_\mathfrak{p}$. Pour $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathfrak{D})$ ou $\mathscr{C} = \mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$, l'application $\alpha \to [\mathfrak{D}] - [\mathfrak{D}\alpha]$ de $J(A)$ dans $\tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C})$ se factorise en un unique isomorphisme $\eta_\mathfrak{D}$ rendant le diagramme suivant commutatif*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{\mathbb{Q}}^*)\, H^S(\mathscr{C}) \arrow[r, "\eta_{\mathfrak{D}}"] & \tilde{\mathscr{K}}{}_0^S(\mathscr{C}) \\
& J(A) \arrow[ul, "\mathrm{Det}"] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Démonstration. Le résultat se déduit du théorème 1.12, des propositions 2.10, 3.2, 3.5 et du fait que $\mathrm{Det}(J(A))$ est égal à l'ensemble des homomorphismes f de $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), J(\bar{\mathbb{Q}}))$ tel que $f(P_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}))_{\mathfrak{p}}$ soit réel et positif pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}_\infty(K)$ (théorème de Eichler, voir [18, proposition 3]).

PROPOSITION 4.2. *Si A est une K-algèbre simple, l'homomorphisme canonique de $\tilde{\mathscr{G}}_\oplus(\mathfrak{D})$ dans $\tilde{\mathscr{G}}_\oplus^S(\mathfrak{D})$ est bijectif pour tout $S \subset \mathscr{P}(\mathbb{Z}_K)$.*

COROLLAIRE 4.3 (S. Wilson [19]). *Si A est une K-algèbre simple, $\tilde{\mathscr{G}}_\oplus^S(\mathfrak{D})$ est isomorphe à $\mathscr{C}\ell(\mathfrak{M})$ pour tout $S \subset \mathscr{P}(\mathbb{Z}_K)$, où $\mathfrak{M}$ est un ordre maximal de $\mathbb{Z}_K$ dans A.*

Démonstration. La proposition 4.2 se déduit de la proposition 3.6. Le corollaire 4.3 se déduit de la proposition 4.2 et du corollaire 1.7.

Soit $\mathrm{Hom}_{G_K}^+(R_\Gamma, J(\bar{\mathbb{Q}})) = \{f \in \mathrm{Hom}_{G_K}(R_\Gamma, J(\bar{\mathbb{Q}})), \forall \mathfrak{p} \in \mathscr{P}_\infty(K), f(P_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}))_{\mathfrak{p}}$ est réel et positif$\}$.

THÉORÈME 4.3. *Avec les notations du théorème 4.1, pour $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{lp}^S(\mathfrak{D})$, l'application $\alpha \to [\mathfrak{D}, 1, \mathfrak{D}\alpha]$ de $J(A)$ dans $\mathscr{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathscr{C})$ se factorise en un unique homomorphisme $\Delta_{\mathfrak{p}}$ rendant le diagramme suivant commutatif:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{G_K}^+(\mathscr{K}_0(A), J(\mathbb{Q}))/H^S(\mathscr{C}) \arrow[r, "\Delta_{\mathfrak{D}}"] & \mathscr{K}_{0,\mathrm{rel}}^S(\mathscr{C}) \\
& J(A) \arrow[ul, "\mathrm{Det}"] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

L'homomorphisme $\Delta_{\mathfrak{D}}$ est injectif. L'homomorphisme $\Delta_{\mathfrak{D}}$ est surjectif si $\forall \mathfrak{p} \in \mathscr{P}(R) - S$, l'homorphisme $e_{\mathfrak{p}}$ est injectif; $\forall \mathfrak{p} \in S$, l'homomorphisme de décomposition de $\mathscr{K}_0(A)$ dans $\mathscr{G}_0^l(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}})$ est surjectif.

Démonstration. Ce théorème découle immédiatement des propositions du paragraphe précédent.

5. PROPRIÉTÉS FONCTORIELLES DE $\tilde{\mathscr{G}}_\oplus^S(\mathfrak{D})$ ET $\tilde{\mathscr{K}}_0^S(\mathfrak{D})$

On reprend les hypothèses et notations du paragraphe précédent.

Dans ce paragraphe, on généralise les propriétés fonctorielles du groupe des classes projectives d'un ordre d'une algèbre de groupes, données par A.

Fröhlich [6]. Ces propriétés montrent en particulier que pour $\mathfrak{D}=\mathbb{Z}_K[\Gamma]$, où Γ est un groupe fini, $\mathscr{G}^S_{\oplus}(\mathfrak{D})$ et $\mathscr{K}^S_0(\mathfrak{D})$ sont des modules de Frobenius sur $\mathscr{K}_0(K[\Gamma])$ (voir [3]).

(1) Soit F une extension finie de K. Le foncteur extension des scalaires de $\mathbb{Z}_K$ à $\mathbb{Z}_F$ donne un homomorphisme, noté Ext^F_K, de $\tilde{\mathscr{G}}^S_{\oplus}(\mathfrak{D})$ (resp. $\tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathfrak{D})$) dans $\tilde{\mathscr{G}}^{S'}(\mathfrak{D}')$ (resp. $\tilde{\mathscr{K}}^{S'}_0(\mathfrak{D}')$) où $\mathfrak{D}'=\mathbb{Z}_F\otimes_{\mathbb{Z}_K}\mathfrak{D}$ et S' est l'ensemble des idéaux premiers de $\mathbb{Z}_F$ au-dessus des idéaux premiers de S.

Proposition 5.1. *Pour $\mathscr{C}=\mathscr{C}(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$) et $\mathscr{C}'=\mathscr{C}(\mathfrak{D}')$ (resp. $\mathscr{C}^{S'}_{lp}(\mathfrak{D}')$) le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),\bar{\mathbb{Q}}^*)\,H^S(\mathscr{C}) \arrow[r, "n_{\mathfrak{D}}"] \arrow[d] & \tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C}) \arrow[d, "\mathrm{Ext}^F_K"] \\
\mathrm{Hom}_{G_F}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}_{G_F}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),\bar{\mathbb{Q}}^*)\,H^{S'}(\mathscr{C}') \arrow[r, "n_{\mathfrak{D}'}"] & \tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C}')
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On utilise la commutativité du diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),\bar{\mathbb{Q}}^*) \arrow[d] & J(A) \arrow[l, "\mathrm{Det}"'] \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C}) \arrow[d, "\mathrm{Ext}^F_K"] \\
\mathrm{Hom}_{G_F}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}_{G_F}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),\bar{\mathbb{Q}}^*) & J(F\otimes_K A) \arrow[l, "\mathrm{Det}"'] \arrow[r] & \tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C}')
\end{tikzcd}$$

et le théorème 4.1.

Inversement, le foncteur restriction des scalaires de $\mathbb{Z}_F$ à $\mathbb{Z}_K$ donne un homomorphisme Res^K_F de $\tilde{\mathscr{G}}^{S'}_{\oplus}(\mathfrak{D}')$ (resp. $\tilde{\mathscr{K}}^{S'}_0(\mathfrak{D}')$) dans $\tilde{\mathscr{G}}^S_{\oplus}(\mathfrak{D})$ (resp. $\tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathfrak{D})$).

On fait opérer G_F sur $\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}}))$ par

$$\forall g\in G_F,\qquad \forall f\in \mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}})),\qquad \forall x\in\mathscr{K}_0(\bar{A}),\qquad f^g(y)=gf(y^{g^{-1}}).$$

Pour cette opération on a $\mathrm{Hom}_{G_F}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}}))=\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}}))^{G_F}$. L'application de corestriction en dimension 0, définit un homomorphisme de $\mathrm{Hom}_{G_F}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}}))$ dans $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}}))$; on la note $\mathscr{N}_{F/K}$; on a $\mathscr{N}_{F/K}(f)(y)=\prod_{s\in G_K/G_F} sf(y^{s^{-1}})$.

Proposition 5.2. *Avec les notations de la proposition précédente, le diagramme suivant commute*:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),\bar{\mathbb{Q}}^*)\,H^S(\mathscr{C}) \arrow[r, "n_{\mathfrak{D}}"] & \tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C}) \\
\mathrm{Hom}_{G_F}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}_{G_F}(\mathscr{K}_0(\bar{A}),\bar{\mathbb{Q}}^*)\,H^{S'}(\mathscr{C}') \arrow[r, "n_{\mathfrak{D}'}"] \arrow[u, "\mathscr{N}_{F/K}"'] & \tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C}'). \arrow[u, "\mathrm{Res}^K_F"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $\alpha \in J(A')$ où $A' = F \otimes_K A$. On a d'une part:

$$\eta_{\mathfrak{D}} \circ \mathscr{N}_{F/K}(\mathrm{Det}(\alpha)) = \eta_{\mathfrak{D}} \left(\prod_{s \in G_K/G_F} \mathrm{Det}^s(\alpha) \right).$$

D'autre part, $\mathrm{Res}_F^K \circ \eta_{\mathfrak{D}'}(\mathrm{Det}(\alpha)) = [\mathfrak{D}'] - [\mathfrak{D}'\alpha]$ où $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}'\alpha$ sont considérés comme des $\mathfrak{D}$-modules. Soit $\{\lambda_i\}_{(i=1,\dots,t=[F:K])}$ une base de $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}_F)} \mathbb{Z}_{F_\mathfrak{p}}$ sur $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}_K)} \mathbb{Z}_{K_\mathfrak{p}}$. Il existe $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,t} \in J(M_t(A))$ telle que $\lambda_i \alpha = \sum_i a_{ij} \lambda_j$. On en déduit que $[\mathfrak{D}'] - [\mathfrak{D}'\alpha]$ est égal à $\eta_{\mathfrak{D}} \circ \mathrm{Det}(a_{i,j})_{i,j}$. La formule VI.6 de A. Fröhlich [6] donne $\prod_{s \in G_K/G_F} \mathrm{Det}^s(\alpha) = \mathrm{Det}(a_{i,j})_{i,j}$.

(2) Soit A' un K-algèbre semi-simple de dimension finie sur K contenant A. Soit $\mathfrak{D}'$ un ordre de $\mathbb{Z}_K$ dans A' contenant $\mathfrak{D}$. On suppose que A' est un A-module libre. Le foncteur restriction des scalaires de $\mathfrak{D}'$ à $\mathfrak{D}$ donne un homomorphisme, noté $\mathrm{Res}_{\mathfrak{D}'}^{\mathfrak{D}}$, de $\mathscr{G}_{\oplus}^S(\mathfrak{D}')$ (resp. $\mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D}')$) dans $\mathscr{G}_{\oplus}^S(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D})$).

Le foncteur extension des scalaires de $\bar{A}$ à $\bar{A}'$ donne un homomorphisme de $\mathscr{K}_0(\bar{A})$ dans $\mathscr{K}_0(\bar{A}')$, car $\bar{A}'$ est un $\bar{A}$ module libre, d'où par transposition on a un homomorphisme ${}^t(\mathrm{Ext}_{\bar{A}}^{\bar{A}'})$ de $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}'), J(\bar{\mathbb{Q}}))$ dans $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), J(\bar{\mathbb{Q}}))$.

PROPOSITION 5.3. *Pour $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C}_{lp}^S(\mathfrak{D})$) et $\mathscr{C}' = \mathscr{C}(\mathfrak{D}')$ (resp. $\mathscr{C}_{lp}^S(\mathfrak{D}')$) le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{\mathbb{Q}}^*)\, H^S(\mathscr{C}) \arrow[r, "\eta_{\mathfrak{D}}"] & \tilde{\mathscr{K}}_0^S(\mathscr{C}) \\
\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}'), J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}'), \bar{\mathbb{Q}}^*)\, H^S(\mathscr{C}') \arrow[r, "\eta_{\mathfrak{D}'}"] \arrow[u, "{}^t(\mathrm{Ext}_{\bar{A}}^{\bar{A}'})"] & \tilde{\mathscr{K}}_0^S(\mathscr{C}') \arrow[u, "\mathrm{Res}_{\mathfrak{D}'}^{\mathfrak{D}}"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $\alpha \in J(A')$, $\mathrm{Res}_{\mathfrak{D}'}^{\mathfrak{D}} \circ \eta_{\mathfrak{D}'}(\mathrm{Det}\, \alpha) = [\mathfrak{D}'] - [\mathfrak{D}'\alpha]$ où $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}'\alpha$ sont considérés comme des $\mathfrak{D}$ modules. Comme $\mathfrak{D}'$ est un $\mathfrak{D}$-module libre, soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de $\mathfrak{D}'$ sur $\mathfrak{D}$. Il existe donc une matrice $(a_{i,j})_{i,j,\dots,n} \in J(M_n(A))$ telle que $\alpha \lambda_i = \sum_j \lambda_j a_{i,j}$. On a:

$$[\mathfrak{D}'] - [\mathfrak{D}'\alpha] = \eta_{\mathfrak{D}}(\mathrm{Det}((a_{i,j})_{i,j})).$$

La formule VIII.4 de A Fröhlich [6] montre que $\mathrm{Det}(a_{i,j})_{i,j} = {}^t(\mathrm{Ext}_{\bar{A}}^{\bar{A}'}) \circ \mathrm{Det}\, \alpha$.

Inversement, supposons que $\mathfrak{D}'$ soit un $\mathfrak{D}$-module libre, le foncteur d'extension des scalaires de $\mathfrak{D}$ à $\mathfrak{D}'$ donne, comme $\mathfrak{D}'$ est supposé être un $\mathfrak{D}$-module libre, un homomorphisme, noté $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}'}$, de $\mathscr{G}_{\oplus}^S(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D})$) dans $\mathscr{G}_{\oplus}^S(\mathfrak{D}')$ (resp. $\mathscr{K}_0^S(\mathfrak{D}')$).

Le foncteur de restriction des scalaires de $\bar{A}'$ à $\bar{A}$ donne un homomorphisme de $\mathscr{K}_0(\bar{A}')$ dans $\mathscr{K}_0(\bar{A})$, d'où par transposition on a un homomorphisme ${}^t(\mathrm{Res}^{\bar{A}}_{\bar{A}'})$ de $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), J(\bar{\mathbb{Q}}))$ dans $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}'), J(\bar{\mathbb{Q}}))$.

PROPOSITION 5.4. *Pour $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D})$) et $\mathscr{C}' = \mathscr{C}(\mathfrak{D}')$ (resp. $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D}')$), le diagramme suivant commute*:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{\mathbb{Q}}^*)\, H^S(\mathscr{C}) \arrow[r, "\eta_{\mathfrak{D}}"] \arrow[d, "{}^t(\mathrm{Res}^{\bar{A}}_{\bar{A}'})"] & \tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C}) \arrow[d, "\mathrm{Ext}^{\mathfrak{D}'}_{\mathfrak{D}}"] \\
\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}'), J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(\bar{A}), \bar{\mathbb{Q}}^*)\, H^S(\mathscr{C}') \arrow[r, "\eta_{\mathfrak{D}'}"] & \tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C}')
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Il est clair que si $\alpha \in J(A)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^{\mathfrak{D}'}_{\mathfrak{D}} \circ \eta_A(\mathrm{Det}\,\alpha) = \eta_{\mathfrak{D}'} \circ \mathrm{Res}^{\bar{A}}_{\bar{A}'}(\mathrm{Det}\,\alpha) &= [\mathfrak{D}' \otimes_{\mathfrak{D}} \mathfrak{D}] - [\mathfrak{D}' \otimes_{\mathfrak{D}} \mathfrak{D}\alpha] \\
&= [\mathfrak{D}'] - [\mathfrak{D}'\alpha].
\end{aligned}$$

(3) Soit θ un homomorphisme surjectif de A dans une K algèbre A' et $\mathfrak{D}'$ l'image de $\mathfrak{D}$ dans A'. Le groupe $\mathscr{K}_0(\bar{A}')$ s'identifie par θ^* à un facteur direct de $\mathscr{K}_0(A)$ car A est semi-simple. On a donc par transposition un homomorphisme surjectif ${}^t\theta^*$ de $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(A), J(\bar{\mathbb{Q}}))$ dans $\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(A'), J(\bar{\mathbb{Q}}))$.

PROPOSITION 5.5. *Pour $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathfrak{D})$ (resp. $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D}')$) et $\mathscr{C}' = \mathscr{C}(\mathfrak{D}')$ (resp. $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathfrak{D}')$) le diagramme suivant commute si $\theta^*(P_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}')) \subset P_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D})$, $\forall \mathfrak{p} \in S$*:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(A), J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(A), \bar{\mathbb{Q}}^*)\, H^S(\mathscr{C}) \arrow[r, "\eta_{\mathfrak{D}'}"] \arrow[d, "{}^t\theta^*"] & \tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C}) \arrow[d, "\mathrm{Ext}^{\mathfrak{D}'}_{\mathfrak{D}}"] \\
\mathrm{Hom}_{G_K}(\mathscr{K}_0(A'), J(\bar{\mathbb{Q}}))/\mathrm{Hom}(\mathscr{K}_0(A'), \bar{\mathbb{Q}}^*)\, H^S(\mathscr{C}') \arrow[r, "\eta_{\mathfrak{D}}"] & \tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathscr{C}')
\end{tikzcd}$$

où ${}^t\theta^*$ est un homomorphisme surjectif.

6. S-GROUPES DES CLASSES D'UNE ALGÈBRE DE GROUPE

Soit Γ un groupe fini; on suppose dans ce paragraphe que $\mathfrak{D}$ est l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_K[\Gamma]$ où $\mathbb{Z}_K$ est l'anneau des entiers d'un corps de nombres K. On note R_Γ le groupe des caractères de Γ dans $\bar{\mathbb{Q}}$. On identifie R_Γ et $\mathscr{K}_0(\bar{\mathbb{Q}}[\Gamma])$.

THÉORÈME 6.1. *Pour $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$ (resp. $\mathscr{C}^S_{lp}(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$), soit $H^S(\mathscr{C})$ le sous-groupe de* $\mathrm{Hom}_{G_K}(R_\Gamma, J(\bar{\mathbb{Q}}))$ *formé des homomorphismes f tels que*:

si $\mathfrak{p} \in S$, $f(\varphi)_{\mathfrak{p}}$ est une unité pour tous les caractères φ tels que $\varphi(\gamma) = 0$ lorsque l'ordre de γ appartient à $\mathfrak{p}$, *si* $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}_K) - S$, $f(\varphi)_\mathfrak{p}$ *est une unité pour tous les caractères* φ *de* Γ (*resp. il existe* $\alpha \in \mathbb{Z}_{K_\mathfrak{p}}[\Gamma]^*$ *tel que* $f = \operatorname{Det} \alpha$),

si $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}_\infty(K)$, $\mathfrak{p}$ *réelle*, $f(\varphi)_\mathfrak{p}$ *est réel et positif pour tous les caractères* φ *symplectiques de* Γ.

Alors $\tilde{\mathscr{G}}^S_\oplus(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$ (*resp.* $\tilde{\mathscr{K}}^S_0(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$ *est isomorphe à* $\operatorname{Hom}_{G_K}(R_\Gamma, J(\overline{\mathbb{Q}}))/\operatorname{Hom}_{G_K}(R_\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}^*)\, H^S(\mathscr{C})$.

Démonstration. On utilise le théorème 5.1 et la caractérisation de $P_\mathfrak{p}(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$ donnée par J.-P. Serre [16], théorème 37 et proposition 38].

Le théorème 4.3 appliqué à $\mathbb{Z}_K[\Gamma]$ donne le théorème suivant:

THÉORÈME 6.2. *Pour* $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$ *la suite suivante est exacte*

$$0 \to \operatorname{Hom}^+_{G_K}(R_r, J(\overline{\mathbb{Q}}))/H^S(\mathscr{C}) \to \mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C}) \to \bigoplus_{\substack{\mathscr{P} \in S \\ |\Gamma| \notin \mathscr{P}}} \mathscr{G}_\oplus(\mathscr{C}_\mathscr{P})$$

et pour $\mathscr{C} = \mathscr{C}^S_{1p}(\mathbb{Z}_K[r])$, $\operatorname{Hom}^+_{G_K}(R_r, J(\overline{\mathbb{Q}}))/H^S(\mathscr{C})$ *est isomorphe à* $\mathscr{K}^S_{0,\mathrm{rel}}(\mathscr{C})$ *où* $\operatorname{Hom}^+_{G_K}(R_\Gamma, J(\overline{\mathbb{Q}}))$ *est l'ensemble des homomorphismes* $f \in \operatorname{Hom}_{G_K}(R_\Gamma, J(\overline{\mathbb{Q}}))$ *tel que* $f(\varphi)_\mathfrak{p}$ *est réel et positif pour tout* $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}_\infty(K)$ *et tout caractère* φ *symplectique de* Γ.

COROLLAIRE 6.3. *Le groupe* $\tilde{\mathscr{G}}_\oplus(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$ *est isomorphe à* $\mathscr{C}\ell(\mathfrak{M})$ *où* $\mathfrak{M}$ *est un ordre maximal de* $K[\Gamma]$ *contenant* $\mathbb{Z}_K[\Gamma]$.

Démonstration. On utilise le théorème précédent ou le corollaire 1.10.

Le groupe $\mathscr{C}\ell(\mathfrak{M})$ est bien connu; il s'identifie à $\prod_\chi \mathscr{C}\ell^+(C_\chi)$ où χ parcourt un système de représentants des classes de G_K-conjugaison des caractères irréductibles de G, C_χ est le centre du facteur simple de $K[\Gamma]$ correspondant à χ et $\mathscr{C}\ell^+(C_\chi)$ est le groupe des classes des idéaux de C_χ, au sens restreint si χ est symplectique.

La détermination de $\tilde{\mathscr{G}}^S_\oplus(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$ revient donc à celle du sous-groupe $\mathscr{D}^S_\oplus(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$ noyau de l'homomorphisme canonique de $\tilde{\mathscr{G}}_\oplus(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$ sur $\tilde{\mathscr{G}}^S_\oplus(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$.

L'isomorphisme $\operatorname{Hom}_{G_K}(R_\Gamma, J(\overline{\mathbb{Q}}))/\operatorname{Hom}_{G_K}(R_\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}^*)$. $H(\mathscr{G}_\oplus(\mathbb{Z}_K[\Gamma]))$ dans $\prod_\chi \mathscr{C}\ell^+(C_\chi)$ est donné par l'application qui à $f \in \operatorname{Hom}_{G_K}(R_\Gamma, J(\mathbb{Q}))$ associe la classe des idéaux $\mathfrak{A}_{\chi,f}$ définis par $(\mathfrak{A}_{\chi,f})_\mathfrak{p} = f(\chi)_\mathfrak{p}(\mathbb{Z}_{C_\chi})_\mathfrak{p}$.

PROPOSITION 6.4. *Le groupe* $\mathscr{D}^S_\oplus(\mathbb{Z}[\Gamma])$ *est l'image par l'applicatio* $\eta_{\mathbb{Z}_K[\Gamma]}$ *de* $\prod_{\mathfrak{p} \in S, |\Gamma| \in \mathfrak{p}} \{f \in \operatorname{Hom}_{G_K}(R_\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}^*_\mathfrak{p}),\ \ f(P_\mathfrak{p}(\mathbb{Z}_K[\Gamma]) \subset \overline{\mathbb{Z}}^*_\mathfrak{p}\}/\operatorname{Hom}_{G_K}(R_\Gamma, \overline{\mathbb{Z}}^*_\mathfrak{p})$. *L'image de* $\mathscr{D}^S_\oplus(\mathbb{Z}[\Gamma])$ *dans* $\prod_\chi \mathscr{C}\ell^+(C_\chi)$ *est incluse dans le sous-groupe engendré par les idéaux premiers de* C_χ *au-dessus des idéaux* $\mathfrak{p}$ *appartenant à* S *et tels que l'ordre de* Γ, *noté* $|\Gamma|$, *appartient à* $\mathfrak{p}$.

Démonstration. On utilise la description de $\tilde{\mathscr{G}}_{\oplus}(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$ et $\tilde{\mathscr{G}}^S_{\oplus}(\mathbb{Z}_K[\Gamma])$ donnée par le théorème 6.1. La deuxième partie est alors évidente.

COROLLAIRE 6.5. *Si Γ est un p-groupe, pour toute partie S de $\mathscr{P}(\mathbb{Z})$ $\tilde{\mathscr{G}}^S_{\oplus}(\mathbb{Z}[\Gamma])$ est isomorphe à $\mathscr{C}\ell(\mathfrak{M})$.*

Démonstration. Si Γ est un p-groupe, on sait que les idéaux premiers au-dessus de p dans C_χ ont une classe nulle dans $\mathscr{C}\ell^+(C_\chi)$. Donc $\mathscr{D}^S_{\oplus}(\mathbb{Z}[\Gamma])$ est nul.

PROPOSITION 6.6 *Le groupe $\mathscr{D}^S_{\oplus}(\mathbb{Z}[\Gamma])$ est trivial quel que soit S dans les trois cas suivants*:

Γ est un groupe métacyclique d'ordre pq non abélien (p et q premiers, q divise $p-1$)

Γ est un groupe diédral d'ordre $2p^r$ (p premier)

Γ est un groupe quaternionien d'ordre $4p^r$ (p premier).

Démonstration. Pour tout entier n, on note ζ_n une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Si Γ est métacyclique d'ordre pq, le groupe R_Γ est engendré par q caractères φ^i, pour $i=1,\ldots,q$ de degré 1 et d'ordre divisant q et $(p-1)/q$ carractères ψ^ω de degré q conjugés sur $\mathbb{Q}$. On montre que $P_p(\mathbb{Z}[\Gamma])$ est engendré par φ^i-1 pour $i=1,\ldots,q-1$ et $1+\sum_{\omega\in\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})}\psi^\omega$ où K est le centre du facteur simple correspondant à ψ ($K=\mathbb{Q}(\psi)$). Soit f tel que $f(P_p(\mathbb{Z}[\Gamma])\subset\bar{\mathbb{Z}}_p^*$, alors $f(\chi)$ est une unité pour tous les caractères irréductibles de R_Γ. On montre que $P_q(\mathbb{Z}[\Gamma])$ est engendré par ψ. On conclue que $\mathscr{D}^S_{\oplus}(\mathbb{Z}[\Gamma])$ est trivial car l'idéal premier au-dessus de q dans $\mathbb{Q}(\zeta_q)$ est principal. On utilise les mêmes arguments pour le groupe diédral d'ordre $2p^r$ et $4p^r$ et en remarquant que $P_2(\mathbb{Z}[\Gamma])$ est engendré par les caractères irréductibles de degré 2 et que $P_p(\mathbb{Z}[\Gamma])$ est engendré par les caractères $\varphi-1$ où φ est de degré 1 et les conjugués des caractères irréductibles de degré 2.

PROPOSITION 6.7. *Soit Γ un groupe abélien d'ordre pq (p et q premiers) $S=\{p,q\}$; $\mathscr{G}_{\oplus}(\mathbb{Z}[\Gamma])$ est isomorphe à $\mathscr{C}\ell(\mathbb{Q}(\zeta_p))\times\mathscr{C}\ell(\mathbb{Q}(\zeta_q))\times\mathscr{C}\ell(\mathbb{Q}(\zeta_{pq}))$; $\mathscr{D}^S_{\oplus}(\mathbb{Z}[\Gamma]$ est isomorphe au sous-groupe de $\mathscr{C}\ell(\mathbb{Q}(\zeta_q))\times\mathscr{C}\ell(\mathbb{Q}(\zeta_q))\times\mathscr{C}\ell(\mathbb{Q}(\zeta_{pq}))$ engendré par la classe de l'idéal $(\mathbb{Z}[\zeta_p],\mathfrak{p}\mathbb{Z}[\zeta_q],\mathfrak{p}^{-1}\mathbb{Z}[\zeta_{pq}])$ et de l'idéal $(\mathfrak{q}\mathbb{Z}[\zeta_q],\mathbb{Z}[\zeta_p],\mathfrak{q}^{-1}\mathbb{Z}[\zeta_{pq}])$ où $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{q}$) est l'idéal premier de $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ (resp. $\mathbb{Z}[\zeta_q]$) au-dessus de p (resp. q).*

Démonstration. Soit φ_p (resp. φ_q) un caractère irréducible de R_Γ d'ordre p (resp. q). Le groupe $P_p(\mathbb{Z}[\Gamma])$ (resp. $P_q(\mathbb{Z}[\Gamma])$) est engendré par $\varphi_p^i(1+\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_q)/\mathbb{Q})}\varphi_q^\sigma)$ (resp. $\varphi_q^i(1+\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})}\varphi_p^\sigma)$) pour $i=1,\ldots,p$ (resp. $i=1,\ldots,q$). Soit $f\in\mathrm{Hom}_{G_K}(R_\Gamma,\bar{\mathbb{Q}}_p^*)$, on en déduit que $f(\varphi_p^i)^{-1}=\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_q)/\mathbb{Q})}f(\varphi_q\varphi_p^i)^\sigma$. La proposition 6.3 permet de conclure.

RÉFÉRENCES

1. H. BASS, "Algebraic K-theory," New York, 1968.
2. N. BOURBAKI, "Algèbre," Chap. 8, Hermann, Paris, 1968.
3. PH. CASOU-NOGUÈS, *Modules de Frobenius et structure galoisienne des anneaux d'entiers*, (à paraître).
4. PH. CASSOU-NOGUÈS ET J. QUEYRUT, Structure galoisienne des anneaux d'entiers d'extensions sauvagement ramifiées, II, à paraître.
5. A. FRÖHLICH, Locally free modules over arithmetic orders, *J. Reine Angew. Math.* **274/275** (1975), 112–138.
6. A. FRÖHLICH, Arithmetic and Galois module structure for tame extensions, *J. Reine Angew. Math.* **286/287** (1976), 380–440.
7. A. HELLER, Some exact sequences in algebraic K-theory, *Topologie* **3** (1969), 389–408.
8. A. HELLER ET I. REINER, Grothendieck groups of orders in semi-simple algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **112** (1964), 344–355.
9. H. JACOBINSKI, Genera and decomposition of lattices over orders, *Acta Math.* **121**(1968), 1–29.
10. H. JACOBINSKI, Two remarks about hereditary orders, *Proc. Amer Math. Soc.* **28** (1971), 1–8.
11. V. I. JANČEVSKIĬ, The commutator subgroups of simple algebras with surjective reduced norms, *Soviet Math. Dokl.* **16** (1975), 492–495.
12. T. NAKAYAMA ET Y. MATSUSHIMA, Über die multiplicative group einer p-adischen Division algebra, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **19** (1943), 622–628.
13. J. QUEYRUT, Structure galoisienne des anneaux d'entiers d'extensions sauvagement ramifiées, I. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **31**, 3 (1981), 1–35.
14. I. REINER, Representation rings, *Michigan Math. J.* **14** (1967), 385–391.
15. J.-P. SERRE, "Corps locaux," 2e éd., Hermann, Paris, 1968.
16. J.-P. Serre, "Représentations linéaires des groupes finis," 2e éd., Hermann, Paris, 1971.
17. S. WANG, "On the commutator group of a simple algebra," *Amer. J. Math.* **72** (1950), 323–334.
18. A. WEIL, "Basic Number Theory," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1974.
19. S. WILSON, "Reduced norms in the K-theory of orders, *J, Algebra* **46** (1977), 1–11.